26

74

线性代数期中试卷　　(2018.11.17)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

8

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-\lambda\end{pmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B=\begin{pmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{pmatrix}$，求参数 λ .

-14-8-4　-12

4

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&n-1\\n&&&&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，其中 $n\geq 2$，求 C^{-1}.

<26

8

3. 设 $A\in \mathrm{R}^{3\times 3}, |A|\neq 0$，且有 $A_{ij}=2a_{ij}, i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 为矩阵元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $|A^*|$.

4. 设矩阵 $A=MN^{\mathrm{T}}$，其中 $M,N\in \mathrm{R}^{n\times r}$ $(r\leq n), |N^{\mathrm{T}}M|\neq 0$. 证明：$\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

4

2

5. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&n-1\\3&4&5&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n-1&n-2&\cdots&1\end{vmatrix}$. ($D$的元素$a_{ij}=\begin{cases}i+j-1, & 当i+j\leq n+1,\\2n+1-i-j, & 当i+j>n+1.\end{cases}$)

6

二.(10分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\4\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\\-1\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\7\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；
(2) 在4维列向量组 e_1,e_2,e_3,e_4 中找出所有不能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示的向量，其中 $e_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, e_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}, e_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, e_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

10

三.(10分) 设 $A\in\mathrm{R}^{3\times 3}$，$A$ 的第一列为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，且 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ 和 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $(A-2E)x=\theta$ 的非零解，求 A.

15

四. (15分) 设下列非齐次线性方程组有3个线性无关的解向量：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4 &=1,\\ \lambda x_1+x_2+2x_3+7\mu x_4 &=-2,\\ 4x_1+9x_2-5x_3-6x_4 &=5.\end{cases}$$

(1) 求出该方程组系数矩阵的秩；(2) 求出参数 λ,μ 的值以及方程组的通解.

15

五.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}2&6&6\\3&-1&3\\-3&-3&-7\end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量；(2) 计算矩阵 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

2

六.(10分) 设矩阵 $A\in\mathrm{R}^{m\times n}, \mathrm{r}(A)<n$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系，矩阵 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in\mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

NANJING UNIVERSITY

五.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量；(2) 计算矩阵 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda-2 & -6 & -6 \\ -3 & \lambda+1 & -3 \\ 3 & 3 & \lambda+7 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -6 & -6 \\ -3 & \lambda+1 & -3 \\ 3 & 3 & \lambda+7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -6 & -6 \\ 0 & \lambda+4 & \lambda+4 \\ 3 & 3 & \lambda+7 \end{vmatrix}=(\lambda+4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -6 \\ 3 & \lambda+7 \end{vmatrix}-(\lambda+4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+4)[(\lambda-2)(\lambda+7)+18]-(\lambda+4)[3(\lambda-2)+18]$$

$$=(\lambda+4)[(\lambda-2)(\lambda+7)\cancel{+18}-3(\lambda-2)\cancel{-18}]$$

$$=(\lambda+4)[(\lambda-2)(\lambda+4)]$$

$$=(\lambda+4)^2(\lambda-2)$$

特征值 $\lambda=-4$ (二重) $\lambda=2$

对于 $\lambda=-4$. 有 $(-4E-A)x=0$

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系: $\alpha_{11}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_{12}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\lambda=-4$ 的特征向量为 $k_{11}\alpha_{11}+k_{12}\alpha_{12}$. 其中 k_{11}, k_{12} 不全为0.

对于 $\lambda=2$. 有 $(2E-A)x=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基础解系 $\alpha_{21}=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\lambda=2$ 的特征向量为 $k_{21}\alpha_{21}$. $k_{21}\neq0$.

(2) $|A|=32$，令 $B=A^2+A^*+2E=A^2+32A^{-1}+2E$，$B\xi_1=(2^2+32*(1/2)+2)\xi_1=22\xi_1$，$B\xi_2=10\xi_2, B\xi_3=10\xi_3$，故 $B^{-1}\xi_1=(1/22)\xi_1, B^{-1}\xi_2=(1/10)\xi_2, B^{-1}\xi_3=(1/10)\xi_3$.
于是 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值为 $1/22, 1/10, 1/10$，对应特征向量为 ξ_1, ξ_2, ξ_3.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{vmatrix}=14-54-54\cancel{-18}+18\times7\cancel{+18}$$

3×18

$14+18$

$=32$

$|A|=32$ $B=A^2+A^*+2E=A^2+32A^{-1}+2E$

$AA^*=|A|E$

$A^*=|A|\cdot A^{-1}$

$B\xi_1=(A^2+32A^{-1}+2E)\xi_1$

$=(\lambda_1^2+32\frac{1}{\lambda_1}+2)\xi_1$

$=(4+16+2)\xi_1=22\xi_1$

$B\xi_2=(A^2+32A^{-1}+2E)\xi_1$

$=(\lambda_2^2+32\frac{1}{\lambda_2}+2)\xi_2$

$=(16-8+2)\xi_2$

$=10\xi_2$ (二重)

$B^{-1}\xi_1=\frac{1}{22}\xi_1$

$B^{-1}\xi_2=\frac{1}{10}\xi_2$ (二重).

特征值: $\frac{1}{22}$. $\frac{1}{10}$ (二重).

ξ_1. ξ_2.

线性代数期中试卷

姓名 向稀 学号 231098288 专业 经济学 考试时间 2019.11.16

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分	25	7	10	8	8	10	68

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

+28

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&2&3&4\\-1&3&1&0\\1&2&1&3\end{vmatrix}$.

8'

$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&2&1\\-1&3&1&0\\0&1&0&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&3&0\\0&1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&3&1\\0&1&0\end{vmatrix}$

$=-2(6-1+2)+(-1-1)$

$=-14-2$

$=-16$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$，求矩阵 $B=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{21}&M_{31}\\M_{12}&M_{22}&M_{32}\\M_{13}&M_{23}&m_{33}\end{pmatrix}$，其中 M_{ij} 为行列式$|A|$的ij元素的余子式.

5'

+2

$B=\begin{pmatrix}-16&\cancel{-12}\ -8&0\\\cancel{-8}\ -12&-4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

-17

3. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}$，求 $(E+A)^{-1}$.

4'

+4

$(E+A^{-1})^{-1}-A^{-1}=$

$(E+A)^{-1}=[A^{-1}(E+A)]^{-1}$

$E+A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&4\\1&-1&3\\-2&1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&7\\-1&-7&-5\\-1&-5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-9&-7\\1&8&5\\1&5&5\end{pmatrix}$

$(E+A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&1&4&1&0&0\\1&-1&3&0&1&0\\-2&1&-5&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&-1&-1\\0&2&-3&1&1&2\\0&5&-7&2&0&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&9&7\\0&1&0&-1&-7&-5\\0&0&1&-1&-5&-4\end{array}\right)$

$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&1\\0&-3&4&-1&1&-1\\0&5&-7&2&0&3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&-1&-1\\0&0&-1&1&5&4\\0&1&-1&0&-2&-1\end{array}\right)$

$(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&9&7\\-1&-7&-5\\-1&-5&-4\end{pmatrix}$

$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&1\\0&2&-3&1&1&2\\0&5&-7&2&0&3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&-1&-1\\0&1&-1&0&-2&-1\\0&0&-1&1&5&4\end{array}\right)$

4×5'

+3

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$, $|B|=16$，求 $|A+B|$.

$B=|-3\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\ -2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3|=16$

$B=|-3\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+5\alpha_2,\ -2\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_3|$

$=|-3\alpha_2+\alpha_3,\ 5\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,\ -2\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_3|$

$=|12\alpha_2,\ 5\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,\ -2\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_3|$

$=8|\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_1|$

$=8|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$

$|A|=2$

$\cancel{|A+B|=|A|+|B|}=18$

5. 设矩阵 $A,B\in \mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A,B)$.

2

设 A、B极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$ $s\le\min\{m,n\}$

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_t$ $t\le\min\{m,n\}$

$r(A,B)=\min\{m,s+t\}$

$r(AA^T+BB^T)\le m$

$r(AA^T+BB^T)\le r(AA^T)\le\min\{m,s\}$

$r(AA^T+BB^T)\le r(BB^T)\le\min\{m,t\}$

$\therefore r(AA^T+BB^T)\le\min\{m,s+t\}$

$|A+B|=(\cdots)=\cdots=||A|=22$

$r(AA^T+BB^T)\le r(AA^T)+r(BB^T)$

$m\times n\ n\times m=$ $s+t$

$m\times m$ s,t $\le s+t$

$r(AA^T+BB^T)$

$r=(A\ B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}\le r(A\ B)$

$\boxed{r(AA^T+BB^T)\ge r(A\ B)}$

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_s\end{pmatrix}$

$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_s^2$

$\alpha_1^2+\beta_1^2-\cdots$

二.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&1&-3\\-1&-7&9\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix}3\\s\\2.4\end{pmatrix}$，其中 s 为参数.

+8

-8

(1) 解方程组 $Ax=\beta$;

(2) 令 $B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\gamma^{\mathrm{T}}&3\end{pmatrix}$，解方程组 $By=\theta$.

(1)

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&5&4\\-2&1&-3&-3\\-1&-7&9&6\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&5&4\\0&-5&7&5\\0&-10&14&10\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&5&4\\0&1&-\frac{7}{5}&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{4}{5}&1\\0&1&-\frac{7}{5}&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$Ax=0$ 基础解系 $\alpha=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{7}{5}\\1\end{pmatrix}$

$Ax=b$ 特解 $\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\therefore$ 解: $\eta+k\alpha,\ k\ne0$.

(2)

$B=\begin{pmatrix}1&-3&5&4\\-2&1&-3&-3\\-1&-7&9&6\\3&s&\frac{12}{5}&3\end{pmatrix}$ $y=0$

$\begin{pmatrix}1&-3&5&4\\0&-5&7&5\\0&-10&14&10\\0&s+9&-\frac{63}{5}&-9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&5&4\\0&-5&7&5\\0&s+9&-\frac{63}{5}&-9\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}&1\\0&1&-\frac{7}{5}&-1\\0&s+9&-\frac{63}{5}&-9\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$s=-9$. $\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}&1\\0&1&-\frac{7}{5}&-1\\0&0&1&35\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0&-27\\0&1&0&48\\0&0&1&35\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha=\begin{pmatrix}27\\-48\\-35\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}&1\\0&1&-\frac{7}{5}&-1\\0&1&-\frac{63}{5(s+9)}&-\frac{9}{s+9}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$s\ne9$ $\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}&1\\0&1&-\frac{7}{5}&-1\\0&0&1&-\frac{55}{56}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

5. 设矩阵 $A,B\in \mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A,B)$.

证：$(AA^T+BB^T)=(A,B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}$.

若 x 满足 $\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$，则有 $(AA^T+BB^T)x=(A,B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$.

若 x 满足 $(AA^T+BB^T)x=\theta$，令 $y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x$，则有 $x^T(AA^T+BB^T)x=y^Ty=0$，

故 $y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$，从而 $(AA^T+BB^T)x=\theta$ 与 $\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$ 同解.

于是 $r(N(AA^T+BB^T))=r(N\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix})$，进一步有 $r(AA^T+BB^T)=r\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}=r(A,B)$.

$(AA^T+BB^T)=(A\ B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}$ $\quad\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=0\quad (AA^T+BB^T)x=0.$

$(AA^T+BB^T)x=0.\quad (A\ B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=0\quad y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x$

$(A\ B)y=0\quad y^T=x^T(A\ B).$

$x^T(AB)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=y^Ty=0.$

$y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=0.$

r

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac45&1\\0&1&-\frac75&-1\\0&0&0&0\\3&s&2.4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac45&1\\0&1&-\frac75&-1\\0&0&0&0\\1&s&\frac45&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac45&1\\0&1&-\frac75&-1\\0&0&s&\frac57 s\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$s=0\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac45\\\frac75\\1\\0\end{pmatrix}\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-\frac57\\1\end{pmatrix}$

二.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&1&-3\\-1&-7&9\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}3\\s\\2.4\end{pmatrix}$，其中 s 为参数.

(1) 解方程组 $Ax=\beta$；　(2) 令 $B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\gamma^{\mathrm{T}}&3\end{pmatrix}$，解方程组 $By=\theta$.

解：(1) $(A,\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&5&4\\0&-5&7&5\\0&-10&14&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，

得一个特解为：$\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，齐次方程组的基础解系为：$\xi=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\end{pmatrix}$，故通解为：$\eta+k\xi,\ k\in R$.

(2) 利用(1)的计算结果，有 $B\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\\3&s&2.4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&s&5s/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$\frac{12}{5}$

当 $s=0$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，

故通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1,k_2\in R$.

当 $s\neq0$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&3/7\\0&1&0&0\\0&0&1&5/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}-3/7\\0\\-5/7\\1\end{pmatrix}$，通解为：$k_3\xi_3,\ k_3\in R$.

(2) 解法二：利用(1) 的过程，$(A,\beta)y=\theta$ 可得通解 $y=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 $\xi_1=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，

代入 B 的最后一行 $(\gamma^T,3)y=0$ 计算后得到 $\frac75 sk_1+sk_2=0$，

当 $s=0$ 时，等式恒成立，故通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1,k_2\in R$.

当 $s\neq0$ 时，$k_1=-\frac57k_2$，故通解为 $k_2(-\frac57\xi_1+\xi_2)=k_2\begin{pmatrix}-3/7\\0\\-5/7\\1\end{pmatrix},\ k_2\in R$.

三. 10 (10分) 设n阶矩阵A满足$(A^*)^* = O$，其中$(A^*)^*$是A的伴随矩阵A^*的伴随矩阵，证明 $|A| = 0$.

$AA^* = |A|E$

$A^* = |A| \cdot A^{-1}$.　　$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$.

$(A^*)(A^*)^* = |A^*|E$

$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1}$

$= |A|^{n-1} \cdot \frac{1}{|A|} A$

$O = (A^*)^* = |A|^{n-2} A$　　$\therefore |A| = 0$.

$A \neq O$.

四. 6 (15分) 设两个向量组

$$A: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ 和 } B: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(1) 分别求向量组 A 的一个极大无关组和向量组 B 的一个极大无关组；

(2) 找一个向量 γ 使得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma$ 等价，给出理由.

-2　　-7

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \mid \beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \mid \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$

$\alpha_1\ \alpha_3\ \beta_2$

$\beta_1\ \beta_2\ \alpha_1$

$\gamma = \beta_2 + \alpha_1$

(1) $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(α_1, α_3)

(2) $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & -5 & 12 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(β_1, β_2).

(2) 只需 $(\alpha_1, \alpha_3, \gamma)$ 与 $(\beta_1, \beta_2, \gamma)$ 等价.

?

$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 4 & & \\ 3 & & \gamma \\ 1 & & \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 1 & -3 & \\ 2 & -5 & \gamma \\ -1 & 2 & \end{pmatrix}$　　$+7$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & \\ 4 & 3 & 1 & -3 & \\ 3 & 1 & 2 & -5 & \gamma \\ 1 & 2 & -1 & 2 & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & -5 & \\ 2 & -1 & 0 & -11 & \gamma \\ -1 & 3 & 0 & 4 & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 2 & -1 & 0 & -\frac{27}{2} & \gamma \\ -1 & 3 & 0 & \frac{23}{2} & \end{pmatrix}$　　$-\frac{5}{2} - \frac{22}{2}$　　$3 \times \frac{5}{2}$　$\frac{15}{2} + \frac{8}{2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \\ 2 & -1 & 0 & -27 & \gamma \\ -1 & 3 & 0 & 23 & \end{pmatrix}$　　$\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

五. 8 (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.　　$|A| = 10 - 20 + 10 - 40 = -40$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量；　　(2) 计算行列式 $|3E + A^*|$.

$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 5 & -5 & \lambda-10 \end{pmatrix}$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & -2 \\ \lambda+1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda-10 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -5 & \lambda-10 \end{vmatrix} - (\lambda+1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & \lambda-10 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-10) - (\lambda+1)[2(\lambda-10) - 10]$

$= (\lambda+1)[\lambda^2 - 11\lambda + 10 - 2\lambda + 20 + 10]$

$= (\lambda+1)[\lambda^2 - 13\lambda + 40]$

$= (\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-8)$

特征值：$\lambda = -1, 5, 8$.

对于 $\lambda = -1$, ---

$\lambda = 5$, ---

$\lambda = 8$, ---

$A^* A = |A| E$

$A^* = |A| \cdot A^{-1}$.

$3E +$

$|3E + A^*|\xi_i = |3E - 40A^{-1}|\xi_i$

$= (3 - \frac{40}{\lambda_i})\xi_i$

$-3 + 40$

$15 - 8$

$24 - 5$

$37\xi_1$

$7\xi_2$

$19\xi_3$

$+2$

六. 10 (10分) 设 n 阶实矩阵 $A \sim D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n$, $f(\lambda) = |\lambda E - A|$.

(1) 证明 $f(d_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$;　　(2) 证明 $f(A) = O$.

(1) $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$.

$f(d_i) = |d_i E - A| = 0$.

d_i 是特征值，有 $|d_i E - A| = 0$.

(2) $f(A) = |AE - A| = |A - A| = 0$.

三. (10分) 设 n 阶矩阵 A 满足 $(A^*)^* = O$，其中 $(A^*)^*$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的伴随矩阵，证明 $|A| = 0$.

证：反证法，设$|A| \neq 0$，则有 $A^* = |A|A^{-1}, |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$，

进一步有 $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-2}A$.

因为 $(A^*)^* = O$，故 $|A|^{n-2}A = O$，从而 $A = O$，得出 $|A| = 0$ 矛盾，故 $|A| = 0$.

证法二：$|A|AA^*A^{**} = |A|^2A^{**} = |A|^2O = O$，

$|A|AA^*A^{**} = |A| \cdot |A^*|A = |AA^*|A = |\ |A|E\ |A = |A|^nA$，

故 $|A|^nA = O$，于是或者 $|A| = 0$，或者 $A = O$，从而也有 $|A| = 0$.

证法三：$AA^* = |A|E$，两边取行列式得 $|A| \cdot |A^*| = |A|^n$，同理有 $|A^*| \cdot |A^{**}| = |A^*|^n$.

因为 $A^{**} = O$，故 $|A^*|^n = |A^*| \cdot |O| = 0$，于是 $|A^*| = 0$，进一步 $|A|^n = |A| \cdot |A^*| = 0$，最后有 $|A| = 0$.

四.(15分) 设两个向量组 $A: \alpha_1 = \begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}4\\8\\6\\2\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$ 和 $B: \beta_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\\-5\\2\end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix}-3\\7\\12\\-5\end{pmatrix}$.

(1) 分别求向量组 A 的一个极大无关组和向量组 B 的一个极大无关组；

(2) 找一个向量 γ 使得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma$ 等价，给出理由.

解：(1) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

故 A 的一个极大无关组为：α_1, α_3，$A \cup B$ 的一个极大无关组为：$\alpha_1, \alpha_3, \beta_2$.

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

故 B 的一个极大无关组为：β_1, β_2，$A \cup B$ 的一个极大无关组为：$\beta_1, \beta_2, \alpha_1$.

(2) A 中加 β_2 可表示 B，B 中加 α_1 可表示 A，故可取 $\gamma = \beta_2 + \alpha_1 = (4, 1, -2, 3)^T$，

于是 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma\}$ 等价于 $\{\alpha_1, \alpha_3, \beta_2\}$，等价于 $\{\beta_1, \beta_2, \alpha_1\}$ 等价于 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma\}$.

即添加 γ 后两组向量组等价.

五.(10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量；　　(2) 计算行列式 $|3E + A^*|$.

解：(1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 5 & -5 & \lambda - 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 & -2 \\ \lambda + 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda - 10 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 5)(\lambda - 8)$，

故特征值为：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 8$.

$\lambda_1 = -1$ 时，$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，特征向量：$k_1\xi_1, k_1 \neq 0$.

$\lambda_2 = 5$ 时，$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$，特征向量：$k_2\xi_2, k_2 \neq 0$.

$\lambda_3 = 8$时，$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -14/45 \\ 0 & 1 & 4/45 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_3 = \begin{pmatrix} 14/45 \\ -4/45 \\ 1 \end{pmatrix}$，特征向量:$k_3\xi_3, k_3 \neq 0$.

(2) $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -40 \neq 0$，故 $A^* = |A|A^{-1} = -40A^{-1}$，

$(3E+A^*)\xi_i = 3\xi_i - 40\lambda_i^{-1}\xi_i = (3-40/\lambda_i)\xi_i, i = 1, 2, 3$，故 $3E+A^*$ 有特征值 $\mu_i = 3-40/\lambda_i = 43, -5, -2$，

于是 $|3E + A^*| = \mu_1\mu_2\mu_3 = 430$.

$|A| = \mu_1\mu_2\mu_3 = \cdots$

(2) 的解法二：$|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -40 \neq 0$，

故 $A^* = |A|A^{-1} = -40A^{-1} = -40\begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1/20 \\ -1/2 & -1/2 & 1/10 \\ 1/8 & -1/8 & 3/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & -2 \\ 20 & 20 & -4 \\ -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$，

于是 $|3E + A^*| = \begin{vmatrix} 13 & 30 & -2 \\ 20 & 23 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 43 & -2 \\ 20 & 43 & -4 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 430$.

(2) 的解法三：$|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -40$，设 $B = A(3E + A^*) = 3A + |A|E = 3A - 40E$，

于是 $|A| \cdot |3E + A^*| = |B| = \begin{vmatrix} -37 & -6 & 6 \\ -6 & -37 & 0 \\ -15 & 15 & -10 \end{vmatrix} = -17200$，故 $|3E + A^*| = -17200/(-40) = 430$.

六.(10分) 设 n 阶实矩阵 $A \sim D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, d_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n, f(\lambda) = |\lambda E - A|$.

(1) 证明 $f(d_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$；　　(2) 证明 $f(A) = O$.

证：(1) 因为 $A \sim D$，故 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda E - D| = (\lambda - d_1) \cdots (\lambda - d_n)$，所以 $f(d_i) = 0$.

(2) $f(A) \sim f(D) = \begin{pmatrix} f(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(d_n) \end{pmatrix} = O$，故 $f(A) = P^{-1}OP = O$.

(2) 的证法二：因为 $A \sim D$，故有可逆矩阵 P 使得 $A = P^{-1}DP$，且 A 有特征值 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，

从而 $f(\lambda) = (\lambda - d_1)(\lambda - d_2) \cdots (\lambda - d_n)$. 于是

$$\begin{aligned} f(A) &= (A - d_1E) \cdots (A - d_nE) \\ &= (P^{-1}DP - d_1E) \cdots (p^{-1}DP - d_nE) \\ &= P^{-1}(D - d_1E)P \cdot P^{-1}(D - d_2E)P \cdots P^{-1}(D - d_nE)P \\ &= P^{-1}(D - d_1E)(D - d_2E) \cdots (D - d_nE)P \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & d_2 - d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n - d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 - d_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n - d_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} d_1 - d_n & & & \\ & d_2 - d_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P \\ &= P^{-1}OP = O. \end{aligned}$$

线性代数期中试卷

姓名 向稀　学号 231098288　专业 经济学　考试时间 2020.11.21

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分	34	8	2	15	15	2	76

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

8'

1. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1+3+2+2+2+4+3+4$

$= 8+13 = 21$

6'

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 X 使得 $A(X-B) = C$.

$\Rightarrow X = A^{-1}C + B$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$A^{-1}C = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 2 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

$A^{-1}C + B = \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 2 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 3 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore X = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 3 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

?

8

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -8 \\ -1 & x & 4 \\ -3 & -12 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，且 A 相似于 B，求参数 x, y.

行列式 迹

$A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$　$2x - y = -15$　$-2x - 2y - 2$

$\Rightarrow 4 + x + 5 = 1 + y \Rightarrow x - y = -8$　$2x - y = -14$

$x = -7$　$y = 1$　$-2(2x+5) = -2(y+1)$

8'

4. 已知矩阵 $A, B \in \mathbf{R}^{3\times 3}$，$A$ 有特征值 $-1, -2, 2$，且有 $|A^{-1}B| = 2$，求 $|B|$.

$|A| = -1\times(-2)\times 2 = 4$

$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{4}$

$|A^{-1}||B| = 2 \Rightarrow |B| = 8$

4

5. 已知列向量 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^n, (n > 2)$，$\alpha_1, \alpha_2$线性无关，若$B = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 \end{pmatrix}$，证明：$r(B) = 2$.

$B = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2)$

若 $(\alpha_1, \alpha_2) x = 0$

则 $Bx = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2) x = 0$.

$\therefore Bx$ 与 $(\alpha_1, \alpha_2) x$ 同解.

又 $r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$

$\therefore x$ 只有零解.

$\therefore r(B) = r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$.

× 只有零解.

相悖

5. 已知列向量 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^n, (n > 2)$，$\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关，若 $B = \begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 \end{pmatrix}$，证明：$r(B) = 2$.

证：设 $A = (\alpha_1, \alpha_2)$，则 $B = A^TA$. 若 x 满足 $Bx = \theta$，则 $x^TBx = (Ax)^T(Ax) = 0$，故 $Ax = \theta$.
又 α_1, α_2 线性无关，故 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$，故 $x = \theta$，于是 $Bx = \theta$ 只有零解，从而 $r(B) = 2$.

证法二：假设 $r(B) \neq 2$，则 $|B| = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1^T\alpha_1\alpha_2^T\alpha_2 - \alpha_2^T\alpha_1\alpha_1^T\alpha_2 = \alpha_1^T\alpha_1\alpha_2^T\alpha_2 - (\alpha_1^T\alpha_2)^2 = 0$，
即 $(\alpha_1^T\alpha_2)^2 = \alpha_1^T\alpha_1\alpha_2^T\alpha_2$. 柯西不等式 $(\alpha_1^T\alpha_2)^2 \leq \alpha_1^T\alpha_1\alpha_2^T\alpha_2$，当且仅当 α_1, α_2 成比例时等式成立，
此即 α_1, α_2 线性相关，与条件矛盾，故 $r(B) = 2$.

二.(10分) 解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 & = -11, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 - 7x_4 & = 7, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 & = 0. \end{cases}$

8'

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 4 & -11 \\ 1 & a & 2 & -7 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 & -11 \\ 3 & -1 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & a & 2 & -7 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 9 & -11 \\ 3 & -1 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & a & 2 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4+a & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -9 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4+a & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & a-1 & 2(1+a) & 3a-4 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 & 2(a+3) & 3a+6 \end{pmatrix}$

若 $a = -3$. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $r(A) < r(A\ b)$ 无解

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

若 $a \neq -3$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{3a+6}{a+3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & -1+\frac{3a+6}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3+\frac{3a+6}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{3a+6}{a+3} \end{array}\right)$

$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\eta_2 = \begin{pmatrix} -1+\frac{3a+6}{a+3} \\ 3+\frac{3a+6}{a+3} \\ \frac{3a+6}{a+3} \\ 0 \end{pmatrix}$

构造方程的解

$A\frac{\xi_1}{2}=b$ $A\frac{\xi_2}{3}=b$

$A(\frac{\xi_1}{2}-\frac{\xi_2}{3})=0$ $\alpha=\frac{\xi_1}{2}-\frac{\xi_2}{3}$ $\eta=\frac{\xi_1}{2}$

三.(10分) 设 $A\in \mathrm{R}^{2\times 3}, \mathrm{r}(A)=2$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}, b\neq\theta$，且有 $A\xi_1=2b, A\xi_2=3b$.

求 $Ax=b$ 的通解并求特解 η 使得 $\eta=\min\{x^{\mathrm{T}}x \mid Ax=b\}$ (使得 $x^{\mathrm{T}}x$ 最小的解).

解：$A\xi_1=2b, A\xi_2=3b$，故设 $\eta=\xi_2-\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}, \alpha=3\xi_1-2\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$，

则有 $A\eta=A(\xi_2-\xi_1)=3b-2b=b, A\alpha=A(3\xi_1-2\xi_2)=6b-6b=\theta$.

又有 $\mathrm{r}(A)=2$，故 $Ax=\theta$ 的基础解系含1个向量，故 $Ax=b$ 的通解为 $x=\eta+k\alpha, k\in\mathbf{R}$.

由 $x^{\mathrm{T}}x=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-2+k)^2+(2-3k)^2+(1-k)^2=11k^2-18k+9=11(k-9/11)^2+18/11$，

当 $k=9/11$ 时，特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm{T}}$ 使得 $x^{\mathrm{T}}x$ 最小.

解法二：设 $\eta_1=\frac{1}{2}\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \eta_2=\frac{1}{3}\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}, \alpha=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$，

则有 $A\eta_1=A(\frac{1}{2}\xi_1)=\frac{1}{2}2b=b, A\alpha=A(\eta_1-\eta_2)=b-b=\theta$，又 $\mathrm{r}(A)=2$，故通解为 $x=\eta_1+k\alpha, k\in\mathbf{R}$.

令 $f(k)=x^{\mathrm{T}}x=(-\frac{3}{2}+\frac{k}{6})^2+(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})^2+(\frac{1}{2}-\frac{k}{6})^2$，则 $f'(k)=\frac{11k}{18}-\frac{7}{6}=0$，解得最小点 $k=\frac{21}{11}$，

代入通解得所求特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm{T}}$.

$\eta_1+k\alpha$ 其中 $\alpha=\eta_1-\eta_2$.

$f(k)=x^Tx=(\eta+k\alpha)^T(\eta+k\alpha)$ 1×3 3×1

$=(-\frac{3}{2}+\frac{k}{6})^2+(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})^2+(\frac{1}{2}-\frac{k}{6})^2$

$f'(k)=\cdots$ $k=\cdots$

$\eta=(\cdots)$.

四. (15分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\8\\-1\\4\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-5\\4\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\12\\1\\4\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\6\\-2\\4\end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量;

(2) 向量组中去掉一个向量，使得去掉该向量后向量组的秩减小.

$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&3&0&2&-2\\8&0&12&6&-4\\-1&-5&1&-2&3\\4&4&4&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&2&-2\\4&0&6&3&-2\\1&5&-1&2&-3\\1&1&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&2&-2\\0&-12&6&-5&6\\0&2&-1&0&-1\\0&-2&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&2&-2\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{12}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-\frac{1}{6}&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{12}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_4)$

$\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{3}{2}\alpha_1$

$-\frac{3}{2}$ $\alpha_5=-\frac{1}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1$

(2) α_4. $r(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5)=3$

$r(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_5)=2$

五.(15分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\5&-4&-5\\-2&2&5\end{pmatrix}$.

(1) 计算 A 的特征值和特征向量;

(2) 求一个2次多项式 $f(x)$，使得矩阵 $B=f(A)$ 有一个3重的特征值.

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda&&\\&\lambda&\\&&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-2&1\\5&-4&-5\\-2&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-3&2&-1\\-5&\lambda+4&5\\2&-2&\lambda-5\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&-1\\-5&\lambda+4&5\\2&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-6\\-5&\lambda+4&5\\2&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-6\\\lambda-1&\lambda+4&5\\0&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+4&5\\-2&\lambda-5\end{vmatrix}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}0&\lambda-6\\-2&\lambda-5\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$\lambda=2, 1$(二重)

对于 $\lambda=2$，有 $(2E-A)x=0$

$2E-A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-5&6&5\\2&-2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&5\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\alpha=\begin{pmatrix}4\\\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda=1$，有 $(E-A)x=0$

$E-A=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\-5&5&5\\2&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&1&1\\1&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$f(1)=f(2)$.

$f(x)=x^2+bx+c$ $f(A)=A^2+bA+c$ 减少未知数 $f(1)=1+b+c=f(2)=4+2b+c$.

$b=-3$ $c\in\mathbb{R}$.

取 $b=-3$ $c=0$. $f(x)=x^2-3x$. 有三重特征值 -2.

构造方程的解!

六.(10分) 设矩阵$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\mathrm{r}(A)=n-1$,证明：$A^*=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$为列向量，且有$A\alpha=\theta, A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$. (矩阵 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵)

$r(A)=n-1$. n行 n列

$AA^*=|A|E=0$ $r(A^*)=1$.

$A\alpha\beta^T=0$ $|A|=0$

$AA^*=|A|E=0$.

即证 $A^{-1}AA^*=A^{-1}A\alpha\beta^T$

$A^{-1}AA^*=A^{-1}0=0$

右 $=A^{-1}A\alpha\beta^T=0$.

左 = 右. 即 $A^*=\alpha\beta^T$.

$r(A)=n-1$ x有n维

$Ax=0$. 基础解系为 α.

有 $A\alpha=0$.

$AA^*=|A|E=0$

A^*是 $Ax=0$ 的解. 对A^*分块

$A^*=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\xi_i$满足$A\xi_i=0$

A^* 可用 α 表示：$\xi_i=k_i\alpha$. 设$(k_1,\cdots,k_n)=\beta^T$

$A^*=(k_1\alpha,k_2\alpha,\cdots,k_n\alpha)=\alpha(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\alpha\beta^T$

$A\alpha=0$ $\alpha^TA^T=0$

$(A^*)^T=\beta\alpha^T$

$A^*A=0$ $\alpha^T\neq0$

$A^T(A^*)^T=0$ $\therefore A^T\beta=0$

$A^T\beta\alpha^T=0$

院系 商学院　班级 经济学拔尖班　学号 231098288　姓名 [illegible]

请在所附答题纸上空出密封位置，并填写试卷序号、班级、学号和姓名

密　封　线

南京大学数学系 2021 – 2022 学年第 1 学期

线性代数（第一层次）期中试卷

考试日期：2021年11月20日（120分钟）

题 号	一	二	三	四	五	六	合 计	阅卷教师
得 分	30	12	14	5	10	14	85	

一、简答与计算（本题共5小题，每小题8分，共40分）

1、$B = A^*$，计算B的所有代数余子式的和，即$\sum_{i,j=1}^4 B_{ij}$，此处

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&4&5\\3&0&1&1\\0&0&12&16\\5&0&7&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0&0&4&0\\3&0&1&0\\0&0&0&1\\5&0&7&0\end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&8&0&0\end{pmatrix}$

解答：计算得$r(A) = 3$，$r(A^*) = 1$，$(A^*)^* = 0$，$\sum_{i,j=1}^4 B_{ij} = 0$。

$\sum B_{ij} = 0$

2、计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 1 & 3^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j - a_i) =$$

$(7-1)(7-3)(7-5)(5-3)(5-1)(3-1)$

$= 6 \times 4^2 \times 2^3 = 36 \times 14 \times 8 = 768$

解答：$D_5 = (7-1)(7-3)(7-5)(5-1)(5-3)(3-1) = (6!!)(4!!)2 = 768$

3、证明：如果$A \xrightarrow{c} B$，则A的列向量组与B的列向量组等价。

解答：略。

$A(\alpha_i P, \alpha_s P \ldots$

$A = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) \to B = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)$

$\exists$可逆阵，$AP = B$.　$\boxed{A = BP^{-1}}$　$\beta_i = \alpha_i P_i$

可以　$\therefore \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n = \alpha_1 P_1\ \alpha_2 P_2 \cdots \alpha_n P_n$

4、计算$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$A^k = 0$，$k > 1$是正整数。证明：$E - A$可逆。

解答：$(E-A)(E + A + \cdots + A^{k-1}) = E + A + \cdots + A^{k-1} - A - \cdots - A^k = E - A^k = E$。

$E - A^2 = E$

$(E-A)(E+A) = E$

$A \cdot B = E$

$\therefore E - A \cdot E + A$ 可逆

$Ay = \begin{pmatrix} 2&1&1\\1&a&b\\1&b&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1+a+b\\b+3\end{pmatrix}$　$4 = 1+a+b = b+3$　$b=1$　$a=2$

5、$\eta = (1,1,1)^T$是矩阵A的特征向量，计算a, b与A的所有特征值，此处：

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{Ay = \lambda y}$

$\begin{pmatrix}4\\1+a+b\\b+3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

解答：$A\eta = (4, a+b+1, b+3)^T = \lambda(1,1,1)^T$，$4 = a+b+1 = b+3$，$a = 2$，$b = 1$。$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 4$。

$\lambda E - A = \begin{pmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{pmatrix}$　$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda-2&-1\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-1&0\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$　$\lambda_3 = 4$

二、（12分）

计算矩阵X使得$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

解答：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/6 & 2/3 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12&0\\0&1&-1\\\frac12&-\frac12&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac23&\frac13&0\\\frac13&\frac23&0\\\frac16&\frac13&\frac12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-\frac12&0\\-1&2&-1\\1&-\frac32&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac23&\frac13&0\\\frac13&\frac23&0\\\frac16&\frac13&\frac12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12&0&0\\-\frac16&\frac23&-\frac12\\\frac13&-\frac13&\frac12\end{pmatrix}$

三、（14分）

$r(A) = 2$

（1）计算矩阵$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)$的秩，计算$A$列向量组的一个极大线性无关组，并用以表示其余向量（6分）；（2）判断$Ax = b$解的存在性，如有解则计算其通解（8分）。

$\alpha_1\ \alpha_2$　有无穷

$\begin{cases}\alpha_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2\\ \alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2\\ \alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2\end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\eta = \begin{pmatrix}10\\-4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$　$\alpha_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$　$\alpha_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$　$\alpha_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\eta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

解答：

$$(A\ b) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$，极大线性无关组：α_1，α_2

$\alpha_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2$

$Ax = b$解：$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 + \eta_0$

$\eta_1 = (2,-1,1,0,0)^T$，$\eta_2 = (-1,1,0,1,0)^T$，$\eta_3 = (2,1,0,0,1)^T$，

$\eta_0 = (10,-4,0,0,0)^T$，

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

2 -1 1 0 0

-1 1 0 1 0

2 1 0 0 1

设 $Ax=0$. A的极大无关组: $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$.

则 $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) x = 0$.

则 $\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) x = 0$

设 $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) x = y$

$\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} y = 0$

$y^T = x^T \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_r^T \end{pmatrix}$

$y^T (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r) = x^T \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_r^T \end{pmatrix} (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r) = 0$

即 $\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_r^T \end{pmatrix} (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) x = 0$

$m \times n \quad m \times 1 \; 1 \times n$

$A = \alpha_1 \beta_1^T + \alpha_2 \beta_2^T + \cdots + \alpha_r \beta_r^T$

$$
\underset{m \times r}{A = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r)} \underset{r \times n}{\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix}}
$$

$Ax = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} x = 0$

$Ax = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) x$

$\longrightarrow$ $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) x \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} = 0$

$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) x = 0$

$x^T \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_r^T \end{pmatrix} = 0$

$Ax = 0$

$x^T A^T = 0$

$x^T =$

$(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) y = 0$.

$\therefore$ ～～～的解.

$y = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} x$

$\longleftarrow$ $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} x = 0$

$\boxed{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) y = 0.}$

$y = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} x.$

$x^T (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r) \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_r^T \end{pmatrix} = 0$

$y^T = x^T (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r)$

$x^T \; = 0$

$y^T \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_r^T \end{pmatrix} = x^T \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r) = 0.$

$\cancel{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) y = 0}$

$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_r^T \end{pmatrix}$ 是 $y^T x = 0$ 的解.

$PA = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = P^{-1}\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix}$ $\quad A = (\alpha_1 \cdots \alpha_r)\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1^T + \cdots + \alpha_r\beta_r^T.$

$P^{-1} = (\alpha_1 \cdots \alpha_r)$

? 四、(10分)

A为$m \times n$矩阵，$r(A) = r > 0$，证明必有非零m维向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$与$n$维向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$，使得$A = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_r\beta_r^T$。

解答：略。

$m\times n \quad n\times n \quad n\times n$

$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix}$

$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r)\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1^T + \cdots + \alpha_r\beta_r^T.$

五、(10分)

$\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T$为$n$维向量，$A = \alpha\alpha^T$，计算$A$的$n$个线性无关的特征向量。

解答：略。

六、(14分)

$A = (a_{ij})_{3\times3}$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，$A\alpha_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3$，$A\alpha_2 = -2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$，$A\alpha_3 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$。计算$A$的特征值与特征向量（用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性组合表示）。

解答：$P = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$可逆，$AP = PB$，$|\lambda E - B| = (\lambda+3)(\lambda-3)^2 = 0$，$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = -3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 E - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\eta_3 = (1, 1, 1)^T$。$\zeta_1 = P\eta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2$，$\zeta_2 = P\eta_2 = -\alpha_1 + \alpha_3$，$\zeta_3 = P\eta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$。

特征值 3、-3.（二重）

$\xi_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \quad \xi_2 = -\alpha_1 + \alpha_3$

$\xi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$

$\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3).$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda E - B = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore B\alpha^T = \alpha^T A \qquad A \sim B$

$= \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+3 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-3)^2$

特征值：$\lambda = -3$，3（二重）

$\lambda = -3.$ $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \cdots$

南京大学数学系 2022 – 2023 学年第 1 学期

线性代数（第一层次）期中试卷

考试日期：2021年11月12日（120分钟）

题号	一	二	三	四	五	六	合计	阅卷教师
得分								

院系______ 班级______ 学号______ 姓名______

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

密 封 线

一、简答与计算（本题共6小题，每小题8分，共48分）

1、计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

2、计算$(A^*)^*$，此处

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3、计算以下向量组的一个极大线性无关组，并用以表示其余向量，此处：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4、向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$等价，证明齐次线性方程组$Ax = 0$与$Bx = 0$同解，此处

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{ij})_{k\times n} = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_k^T \end{pmatrix}$$

5、计算矩阵X使得 $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6、α_1、α_2、α_3线性相关，α_2、α_3、α_4线性无关。证明α_1可由α_2与α_3线性表出，α_4不能由α_1、α_2与α_3线性表出。

二、（10分）

A是n阶实矩阵，$A^TA = AA^T$。证明：如果A是三角矩阵，则A必为对角矩阵。

三、（12分）

给定矩阵$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)$与向量$\beta$，（1）计算$Ax = 0$的基础解系，并据此表示出所有基础解系（6分）；（2）计算$Ax = \beta$的通解（3分）；（3）$r(A) = r$，是否存在列满秩矩阵$B =$

$(b_{ij})_{n\times r}$使得$r(AB) = 0, 1, 2$？如果存在，试各写出一个这样的矩阵（3分）。

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \cdots \\ \beta_k^T \end{pmatrix}$

四、(10分)

$B = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$是可逆矩阵，$B^{-T} = (\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)$，$A = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_k\beta_k^T$（$k < n$），$b$是$n$维向量。（1）证明$Ax = b$有解当且仅当$b$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$的线性组合（5分）；（2）对于$b = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$，$c_i = \beta_i^T\beta_i$，写出$Ax = b$的通解（5分）。

通解：$b + l_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + l_n\alpha_n$. $l_{k+1}\cdots l_n$不全为0.

五、(10分)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，计算$B = P^{-1}AP$与$A^3 + A^2 + A + E$。

六、(10分)

$A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{k\times n}$，β为m维向量，γ为k维向量。对以下两个问题给出判断，并给出证明或举出反例。（1）如果$Ax = \beta$与$Bx = \gamma$同解，那么$(A\ \beta)$与$(B\ \gamma)$行向量组是否等价？（2）如果$(A\ \beta)$与$(B\ \gamma)$行向量组等价，那么$Ax = \beta$与$Bx = \gamma$是否同解？

线性代数期中试卷 答案 (2018.11.17)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-\lambda\end{pmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B=\begin{pmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{pmatrix}$，求参数 λ .

解：做初等行变换，$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}, B\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&7&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,秩相等得 $\lambda=1$.

解法二：$|B|=0\Rightarrow|A|=\lambda-1=0$，$\therefore\ \lambda=1$.

解法三：$B\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&7&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$，$\therefore\ \lambda=1$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&n-1\\n&&&&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，其中 $n\geq 2$，求 C^{-1}.

解：$(A,E)\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&&&&&0&&&&1/n\\&1&&&&1&0&&&\\&&1&&&&1/2&0&&\\&&&\ddots&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&&&&1/(n-1)&0\end{array}\right), \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}0&&&&1/n\\1&0&&&\\&1/2&0&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1/(n-1)&0\end{pmatrix}$,

$B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$, $C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$.

3. 设 $A\in\mathrm{R}^{3\times3}, |A|\neq0$，且有 $A_{ij}=2a_{ij}, i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 为矩阵元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $|A^*|$.

解：$A^*=2A^{\mathrm{T}}, 2A^{\mathrm{T}}A=A^*A=|A|E$，取行列式，$2^3|A|^2=|2A^{\mathrm{T}}A|=|A|^3$.

因为 $|A|\neq0$，故$|A|=8$，于是有 $|A^*|=|2A^{\mathrm{T}}|=8|A|=64$.

解法二：$|A|\neq0$，则$|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^2$，又有$|A^*|=|2A^{\mathrm{T}}|=8|A|$，故$|A|=8$，且$|A^*|=8|A|=64$.

4. 设矩阵 $A=MN^{\mathrm{T}}$，其中 $M,N\in\mathrm{R}^{n\times r}$ $(r\leq n), |N^{\mathrm{T}}M|\neq0$. 证明：$\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

证：$|N^{\mathrm{T}}M|\neq0, (N^{\mathrm{T}}M)^3$可逆，

故 $r=r((N^{\mathrm{T}}M)^3)=r(N^{\mathrm{T}}A^2M)\leq r(A^2M)\leq r(A^2)\leq r(A)\leq r(M)\leq r$，从而 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

证法二：$|N^{\mathrm{T}}M|\neq0\Rightarrow r=\mathrm{r}(N^{\mathrm{T}}M)\leq\mathrm{r}(N^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(N)\leq r$，$\therefore\ \mathrm{r}(N)=r, \mathrm{r}(M)=r$.

M,N 列满秩，有 $M=P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}, N=Q\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}$，其中 P,Q 可逆.

于是有 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(P\begin{pmatrix}E_r\\O\end{pmatrix}(E_r,O)Q^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(P\begin{pmatrix}E_r&\\&O\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}E_r&\\&O\end{pmatrix}=r$.

$A^2=MN^{\mathrm{T}}MN^{\mathrm{T}}=(M)((N^{\mathrm{T}}M)N^{\mathrm{T}})=M\tilde{N}^{\mathrm{T}}$，$|N^{\mathrm{T}}M|\neq0\Rightarrow(N^{\mathrm{T}}M)$ 可逆，

故 $\mathrm{r}(\tilde{N}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}((N^{\mathrm{T}}M)N^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(N^{\mathrm{T}})=r$，且 $\tilde{N}^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{r\times n}$，于是也有 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(M\tilde{N}^{\mathrm{T}})=r$，

从而 $\mathrm{r}(A^2)=\mathrm{r}(A)$.

5. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&n-1\\3&4&5&\cdots&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n-1&n-2&\cdots&1\end{vmatrix}$. ($D$的元素$a_{ij}=\begin{cases}i+j-1,&\text{当}i+j\leq n+1,\\2n+1-i-j,&\text{当}i+j>n+1.\end{cases}$)

解：$D\overset{\substack{r_{i+1}-r_i\\i=n-1,\cdots,2}}{=}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\1&1&\cdots&1&-1\\1&1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{c_i+c_1\\i=2,\cdots,n}}{=}\begin{vmatrix}1&3&\cdots&n&n+1\\1&2&\cdots&2&0\\1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$,

依次按最后一行展开：$D=(-1)^{(n+1)+n+\cdots+3}2^{n-2}(n+1)=(-1)^{n(n-1)/2}2^{n-2}(n+1)$.

二.(10分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\7\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；

(2) 在4维列向量组 e_1,e_2,e_3,e_4 中找出所有不能被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示的向量，其中 $e_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},e_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},e_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},e_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5|e_1,e_2,e_3,e_4)\to\left(\begin{array}{ccccc|cccc}1&0&-1&0&1&2/3&1/3&-1/3&0\\0&1&3&0&-1.5&-2/3&-5/6&1/3&0\\0&0&0&1&1.5&1/3&1/6&1/3&0\\0&0&0&0&0&-3&-1&0&1\end{array}\right)$.

(1) 一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，且 $\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1-1.5\alpha_2+1.5\alpha_4$，

(2) 第4行分量非零的向量不能表示，即向量 e_1,e_2,e_4.

解法二：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&3&0&-1.5\\0&0&0&1&1.5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，且 $\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1-1.5\alpha_2+1.5\alpha_4$，

(2) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|e_1,e_2,e_3,e_4)\to\left(\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&2/3&1/3&-1/3&0\\0&1&0&-2/3&-5/6&1/3&0\\0&0&1&1/3&1/6&1/3&0\\0&0&0&-3&-1&0&1\end{array}\right)$.

第4行分量非零的向量不能表示，即向量 e_1,e_2,e_4.

三.(10分) 设 $A\in\mathrm{R}^{3\times3}$，$A$ 的第一列为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，且 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ 和 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

是齐次线性方程组 $(A-2E)x=\theta$ 的非零解，求 A.

解：$Ae_1=\alpha_1,A\xi_1=2\xi_1,A\xi_2=2\xi_2$，故 $A(e_1,\xi_1,\xi_2)=(\alpha_1,2\xi_1,2\xi_2)$，

$$A=(\alpha_1,2\xi_1,2\xi_2)(e_1,\xi_1,\xi_2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&6&-9\\-1&4&-7\end{pmatrix}.$$

解法二：设 $A=\begin{pmatrix}2&a_{12}&a_{13}\\-1&a_{22}&a_{23}\\-1&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，由 $(A-2E)\xi_i=\theta,i=1,2$，

得 $\begin{cases}3a_{12}+a_{13}=0,\\3a_{22}+a_{23}=9,\\3a_{32}+a_{33}=5,\\-2a_{12}-a_{13}=0,\\-2a_{22}-a_{23}=-3,\\-2a_{32}-a_{33}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_{12}=a_{13}=0,\\a_{22}=6,\ a_{23}=-9,\\a_{32}=4,\ a_{33}=-7.\end{cases}$ 故 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&6&-9\\-1&4&-7\end{pmatrix}$.

解法三：$(A-2E)(\xi_1,\xi_2)=O$，故 $\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(A-2E)^{\mathrm{T}}=O$，即 $(A-2E)^{\mathrm{T}}$ 的列为方程组 $\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x=\theta$ 的解.

$\begin{pmatrix}\xi_1^{\mathrm{T}}\\\xi_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/9\\0&1&4/9\end{pmatrix}$，通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\-4\\9\end{pmatrix}$. 易知 $(A-2E)^{\mathrm{T}}$ 的第一行为 $(0,-1,-1)$，

故 $(A-2E)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&4&4\\0&-9&-9\end{pmatrix}$，最后有 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&6&-9\\-1&4&-7\end{pmatrix}$.

四. (15分) 设下列非齐次线性方程组有3个线性无关的解向量：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4&=1,\\\lambda x_1+x_2+2x_3+7\mu x_4&=-2,\\4x_1+9x_2-5x_3-6x_4&=5.\end{cases}$$

(1) 求出该方程组系数矩阵的秩；(2) 求出参数 λ,μ 的值以及方程组的通解.

解：(1) $(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 7\mu+2-3\lambda & \lambda-3 \end{array}\right)$，无关解向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

易知 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 是 $Ax=\theta$ 的两个无关解，故 $r(A)=2$.

(2) 由 $r(A)=2$ 知 $\lambda=3,\mu=1$. 令 $x_3=x_4=0$得一个特解$\eta=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，

对应齐次方程组的基础解系为 $\beta_1=(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，通解为 $\eta+k_1\beta_1+k_2\beta_2$.

五.(15**分**) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量；(2) 计算矩阵 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

解：(1) $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+4)^2$，故特征值 $\lambda=2,-4$(二重).

$\lambda=2$，特征向量为 $k_1\xi_1,\xi_1=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

$\lambda=-4$，特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3,\xi_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) $|A|=32$，令 $B=A^2+A^*+2E=A^2+32A^{-1}+2E$，$B\xi_1=(2^2+32*(1/2)+2)\xi_1=22\xi_1$,

$B\xi_2=10\xi_2,B\xi_3=10\xi_3$，故 $B^{-1}\xi_1=(1/22)\xi_1,B^{-1}\xi_2=(1/10)\xi_2,B^{-1}\xi_3=(1/10)\xi_3$.

于是 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值为 $1/22,1/10,1/10$，对应特征向量为 ξ_1,ξ_2,ξ_3.

六.(10**分**) 设矩阵 $A\in\mathrm{R}^{m\times n},\mathrm{r}(A)<n$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系，矩阵 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in\mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

证：只要证明$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=n$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}x=\theta$ 只有零解.

因为解满足 $Ax=\theta$，故x为基础解系的组合，从而存在s维向量 y 使得 $x=Ny$.

又 x 满足$N^{\mathrm{T}}x=\theta$，即 $N^{\mathrm{T}}Ny=\theta$，故 $x^Tx=y^{\mathrm{T}}N^TNy=0$，于是 $x=\theta$ 为零解，结论得证.

证法二：易知 $\mathrm{r}(A)=n-s$，取 A^{T} 列的极大无关组 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-s}$，令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-s})$，则有 $B^{\mathrm{T}}N=O$.

考虑 $k_1\beta_1+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}+t_1\alpha_1+\cdots+t_s\alpha_s=\beta+\alpha=\theta$，

其中 $\beta=k_1\beta_1+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}=Bx,\ \alpha=t_1\alpha_1+\cdots+t_s\alpha_s=Ny,\ x=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-s} \end{pmatrix},y=\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_s \end{pmatrix}$.

则有 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Ny=0$，故 $0=\beta^{\mathrm{T}}\theta=\beta^{\mathrm{T}}(\beta+\alpha)=\beta^{\mathrm{T}}\beta$，故 $\beta=\theta$，于是 $\alpha=\theta$.

从而 $k_1=\cdots=k_{n-s}=0,\ t_1=\cdots=t_s=0$，即 $(B,N)=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-s},\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 的列线性无关，

故有 $\mathrm{r}(B,N)=n$，最后可得 $n=\mathrm{r}(B,N)\le\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)\le n$，即 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

线性代数期中试卷　答案　(2019.11.16)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&2&3&4\\-1&3&1&0\\1&2&1&3\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}0&-1&2&-1\\0&0&2&1\\0&5&2&3\\1&2&1&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&2&1\\5&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2&-1\\0&2&1\\0&12&-2\end{vmatrix}=-16.$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$，求矩阵 $B=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{21}&M_{31}\\M_{12}&M_{22}&M_{32}\\M_{13}&M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}$，其中 M_{ij}为行列式$|A|$的ij元素的余子式.

解：$|A|=8\neq 0,$ 故 $A^*=|A|A^{-1}=8\begin{pmatrix}-2&1&0\\3/2&-1/2&0\\0&0&-1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&8&0\\12&-4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

于是 $B=\begin{pmatrix}A_{11}&-A_{21}&A_{31}\\-A_{12}&A_{22}&-A_{32}\\A_{13}&-A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&-8&0\\-12&-4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

解法二：$M_{11}=-16, M_{21}=-8, M_{31}=0, M_{12}=-12, M_{22}=-4, M_{32}=0, M_{13}=M_{23}=0, M_{33}=-2$

故 $B=\begin{pmatrix}-16&-8&0\\-12&-4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

3. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}$，求 $(E+A)^{-1}$.

解：$(E+A)^{-1}=(A(E+A^{-1}))^{-1}=(E+A^{-1})^{-1}A^{-1}$.

$(E+A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&4\\1&-1&3\\-2&1&-5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&9&7\\-1&-7&-5\\-1&-5&-4\end{pmatrix}$,

故 $(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&9&7\\-1&-7&-5\\-1&-5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-9&-7\\1&8&5\\1&5&5\end{pmatrix}$.

解法二：$(E+A)^{-1}=(A(E+A^{-1}))^{-1}=(E+A^{-1})^{-1}A^{-1}$，即解矩阵方程：$(E+A^{-1})X=A^{-1}$.

$(E+A^{-1}|A^{-1})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&1&4&2&1&4\\1&-1&3&1&-2&3\\-2&1&-5&-2&1&-6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-9&-7\\0&1&0&1&8&5\\0&0&1&1&5&5\end{array}\right)$.

故 $(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-9&-7\\1&8&5\\1&5&5\end{pmatrix}$.

解法三：$A=(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&-2&3\\-2&1&-6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&5/3&11/6\\0&-2/3&-1/3\\-1/2&-2/3&-5/6\end{pmatrix}$,

故 $(E+A)^{-1}=\begin{pmatrix}5/2&5/3&11/6\\0&1/3&-1/3\\-1/2&-2/3&1/6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-9&-7\\1&8&5\\1&5&5\end{pmatrix}$.

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3), |B|=16$，求 $|A+B|$.

解：$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}=AC$，易知 $|C|=8, |B|=|AC|=|A|\cdot|C|=16$，故 $|A|=2$.

于是 $|A+B|=|A(E+C)|=|A|\cdot|E+C|=2\begin{vmatrix}1&1&-2\\-3&0&1\\1&2&0\end{vmatrix}=22.$

解法二：$|B|=|-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-\alpha_2+3\alpha_3|=|-8\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_2+3\alpha_3|=8|A|=16$，故$|A|=2.$
$|A+B|=|\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2|=|-5.5\alpha_1,2\alpha_3,\alpha_2|=11|A|=22.$

解法三：$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}=AC$，则 $A=BC^{-1}=B(\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1&-3&-1\\-2&2&6\\-5&1&3\end{pmatrix})$

$|A+B|=|B(C^{-1}+E)|=|B|\cdot\begin{vmatrix}7/8&-3/8&-1/8\\-2/8&10/8&6/8\\-5/8&1/8&11/8\end{vmatrix}=16\times\frac{11}{8}=22.$

5. 设矩阵 $A,B\in \mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A,B)$.

证：$(AA^T+BB^T)=(A,B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}$.

若 x 满足 $\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$，则有 $(AA^T+BB^T)x=(A,B)\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$.

若 x 满足 $(AA^T+BB^T)x=\theta$，令 $y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x$，则有 $x^T(AA^T+BB^T)x=y^Ty=0$，

故 $y=\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$，从而 $(AA^T+BB^T)x=\theta$ 与 $\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}x=\theta$ 同解.

于是 $r(N(AA^T+BB^T))=r(N\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix})$，进一步有 $r(AA^T+BB^T)=r\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}=r(A,B)$.

二.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&1&-3\\-1&-7&9\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}3\\s\\2.4\end{pmatrix}$，其中 s 为参数.

(1) 解方程组 $Ax=\beta$；　　(2) 令 $B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\gamma^{\mathrm{T}}&3\end{pmatrix}$，解方程组 $By=\theta$.

解：(1) $(A,\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&5&4\\0&-5&7&5\\0&-10&14&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

得一个特解为：$\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，齐次方程组的基础解系为：$\xi=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\end{pmatrix}$，故通解为：$\eta+k\xi,\ k\in R$.

(2) 利用(1)的计算结果，有 $B\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\\3&s&2.4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&s&5s/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

当 $s=0$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&4/5&1\\0&1&-7/5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

故通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1,k_2\in R$.

当 $s\neq 0$ 时，$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&3/7\\0&1&0&0\\0&0&1&5/7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系：$\xi_3=\begin{pmatrix}-3/7\\0\\-5/7\\1\end{pmatrix}$，通解为：$k_3\xi_3,\ k_3\in R$.

(2) 解法二：利用(1) 的过程，$(A,\beta)y=\theta$ 可得通解 $y=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 $\xi_1=\begin{pmatrix}-4/5\\7/5\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

代入 B 的最后一行 $(\gamma^T,3)y=0$ 计算后得到 $\frac{7}{5}sk_1+sk_2=0$，

当 $s=0$ 时，等式恒成立，故通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1,k_2\in R$.

当 $s\neq 0$ 时，$k_1=-\dfrac{5}{7}k_2$，故通解为 $k_2(-\dfrac{5}{7}\xi_1+\xi_2)=k_2\begin{pmatrix}-3/7\\0\\-5/7\\1\end{pmatrix}$，$k_2\in R$.

三. (10**分**) 设 n 阶矩阵 A 满足 $(A^*)^*=O$，其中 $(A^*)^*$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的伴随矩阵，证明 $|A|=0$.

证：反证法，设$|A|\neq 0$，则有 $A^*=|A|A^{-1},|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，

进一步有 $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-2}A$.

因为 $(A^*)^*=O$，故 $|A|^{n-2}A=O$，从而 $A=O$，得出 $|A|=0$ 矛盾，故 $|A|=0$.

证法二：$|A|AA^*A^{**}=|A|^2A^{**}=|A|^2O=O$，

$|A|AA^*A^{**}=|A|\cdot|A^*|A=|AA^*|A=|\ |A|E\ |A=|A|^nA$，

故 $|A|^nA=O$，于是或者 $|A|=0$，或者 $A=O$，从而也有 $|A|=0$.

证法三：$AA^*=|A|E$，两边取行列式得 $|A|\cdot|A^*|=|A|^n$，同理有 $|A^*|\cdot|A^{**}|=|A^*|^n$.

因为 $A^{**}=O$，故 $|A^*|^n=|A^*|\cdot|O|=0$，于是 $|A^*|=0$，进一步 $|A|^n=|A|\cdot|A^*|=0$，最后有 $|A|=0$.

四.(15**分**) 设两个向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\8\\6\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$ 和 $B:\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-3\\7\\12\\-5\end{pmatrix}$.

(1) 分别求向量组 A 的一个极大无关组和向量组 B 的一个极大无关组；

(2) 找一个向量 γ 使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma$ 等价，给出理由.

解：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&1\\0&0&1&-1&0&-1\\0&0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$，

故 A 的一个极大无关组为：α_1,α_3，$A\cup B$ 的一个极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_3,\beta_2$.

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&-1\\0&1&-2&0&0&0\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$，

故 B 的一个极大无关组为：β_1,β_2，$A\cup B$ 的一个极大无关组为：β_1,β_2,α_1.

(2) A 中加 β_2 可表示 B，B 中加 α_1 可表示 A，故可取 $\gamma=\beta_2+\alpha_1=(4,1,-2,3)^T$，

于是 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma\}$ 等价于 $\{\alpha_1,\alpha_3,\beta_2\}$，等价于 $\{\beta_1,\beta_2,\alpha_1\}$ 等价于 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma\}$.

即添加 γ 后两组向量组等价.

五.(10**分**) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&0\\-5&5&10\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量；　　　(2) 计算行列式 $|3E+A^*|$.

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-1&0\\5&-5&\lambda-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&-2\\\lambda+1&\lambda-1&0\\0&-5&\lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-8)$，

故特征值为：$\lambda_1=-1,\lambda_2=5,\lambda_3=8$.

$\lambda_1=-1$ 时，$\begin{pmatrix}-2&2&-2\\2&-2&0\\5&-5&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，特征向量：$k_1\xi_1,k_1\neq 0$.

$\lambda_2=5$ 时，$\begin{pmatrix}4&2&-2\\2&4&0\\5&-5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2/3\\0&1&1/3\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_2=\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1\end{pmatrix}$，特征向量：$k_2\xi_2,k_2\neq 0$.

$\lambda_3=8$时，$\begin{pmatrix}7&2&-2\\2&7&0\\5&-5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-14/45\\0&1&4/45\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系:$\xi_3=\begin{pmatrix}14/45\\-4/45\\1\end{pmatrix}$，特征向量:$k_3\xi_3,k_3\neq 0$.

(2) $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-40\neq 0$，故 $A^*=|A|A^{-1}=-40A^{-1}$，

$(3E+A^*)\xi_i=3\xi_i-40\lambda_i^{-1}\xi_i=(3-40/\lambda_i)\xi_i, i=1,2,3$，故 $3E+A^*$ 有特征值 $\mu_i=3-40/\lambda_i=43,-5,-2$，于是 $|3E+A^*|=\mu_1\mu_2\mu_3=430.$

(2) 的解法二：$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-40\neq 0$，
故 $A^*=|A|A^{-1}=-40A^{-1}=-40\begin{pmatrix}-1/4 & -3/4 & 1/20\\ -1/2 & -1/2 & 1/10\\ 1/8 & -1/8 & 3/40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 30 & -2\\ 20 & 20 & -4\\ -5 & 5 & -3\end{pmatrix}$，
于是 $|3E+A^*|=\begin{vmatrix}13 & 30 & -2\\ 20 & 23 & -4\\ -5 & 5 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13 & 43 & -2\\ 20 & 43 & -4\\ -5 & 0 & 0\end{vmatrix}=430.$

(2) 的解法三：$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-40$，设 $B=A(3E+A^*)=3A+|A|E=3A-40E$，
于是 $|A|\cdot|3E+A^*|=|B|=\begin{vmatrix}-37 & -6 & 6\\ -6 & -37 & 0\\ -15 & 15 & -10\end{vmatrix}=-17200$，故 $|3E+A^*|=-17200/(-40)=430.$

六.(10**分**) 设 n 阶实矩阵 $A\sim D=\begin{pmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{pmatrix}, d_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n, f(\lambda)=|\lambda E-A|.$

(1) 证明 $f(d_i)=0, i=1,2,\cdots,n$； (2) 证明 $f(A)=O.$

证：(1) 因为 $A\sim D$，故 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=|\lambda E-D|=(\lambda-d_1)\cdots(\lambda-d_n)$，所以 $f(d_i)=0.$

(2) $f(A)\sim f(D)=\begin{pmatrix}f(d_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & f(d_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & f(d_n)\end{pmatrix}=O$，故 $f(A)=P^{-1}OP=O.$

(2) 的证法二：因为 $A\sim D$，故有可逆矩阵 P 使得 $A=P^{-1}DP$，且 A 有特征值 $d_1,d_2,\cdots,d_n$，
从而 $f(\lambda)=(\lambda-d_1)(\lambda-d_2)\cdots(\lambda-d_n)$. 于是

$$\begin{aligned}
f(A) &=(A-d_1E)\cdots(A-d_nE)\\
&=(P^{-1}DP-d_1E)\cdots(p^{-1}DP-d_nE)\\
&=P^{-1}(D-d_1E)P\cdot P^{-1}(D-d_2E)P\cdots P^{-1}(D-d_nE)P\\
&=P^{-1}(D-d_1E)(D-d_2E)\cdots(D-d_nE)P\\
&=P^{-1}\begin{pmatrix}0 & & & \\ & d_2-d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n-d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1-d_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n-d_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}d_1-d_n & & & \\ & d_2-d_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}P\\
&=P^{-1}OP=O.
\end{aligned}$$

线性代数期中试卷 答案 (2020.11.21)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-1&1&2&3\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&3&5&7\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5&7\\-1&1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}=3+7+5+6=21.$

解法二：$D=\begin{vmatrix}0&0&0&21\\-1&1&2&3\\0&-1&1&2\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=-21\begin{vmatrix}-1&1&2\\0&-1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=21.$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&3\\1&-1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-6&8\\4&5\\2&2\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}$，求 X 使得 $A(X-B)=C$.

解：$(A,C)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&15&-7\\0&1&0&2&-2\\0&0&1&-10&6\end{array}\right)$，则：$Y=X-B=\begin{pmatrix}15&-7\\2&-2\\-10&6\end{pmatrix}$，故：$X=B+Y=\begin{pmatrix}9&1\\6&3\\-8&8\end{pmatrix}$.

解法二：$(A,AB+C)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&1&-11&3\\2&1&3&0&29\\1&-1&1&-5&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&9&1\\0&1&0&6&3\\0&0&1&-8&8\end{array}\right)$，故：$X=\begin{pmatrix}9&1\\6&3\\-8&8\end{pmatrix}$，

解法三：$(A,E)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4&-1&7\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&3&1&-5\end{array}\right)$，故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-1&7\\-1&0&1\\3&1&-5\end{pmatrix}$，

于是 $X=B+A^{-1}C=\begin{pmatrix}-6&8\\4&5\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15&-7\\2&-2\\-10&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1\\6&3\\-8&8\end{pmatrix}$.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}4&18&-8\\-1&x&4\\-3&-12&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\1&y&1\\1&2&0\end{pmatrix}$，且 A 相似于 B，求参数 x,y.

解：$A\sim B$，故 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B),|A|=|B|$，即 $4+x+5=1+y+0,-2(2x+15)=-2y$，得：$x=-7,y=1$.

解法二：相似矩阵有相同的特征多项式，故有 $\begin{vmatrix}\lambda-4&-18&8\\1&\lambda-x&-4\\3&12&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\-1&\lambda-y&-1\\-1&-2&\lambda\end{vmatrix}$，

即：$\lambda^3-(x+9)\lambda^2+(9x+62)\lambda+4x+30=\lambda^3-(y+1)\lambda^2+(y-2)\lambda+2y$，

比较系数得到：$x=-7,y=1$.

解法三：相似矩阵有相同的特征多项式，故有 $\begin{vmatrix}\lambda-4&-18&8\\1&\lambda-x&-4\\3&12&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\-1&\lambda-y&-1\\-1&-2&\lambda\end{vmatrix}$，

取 $\lambda=0$ 有 $2(2x+15)=2y$，取 $\lambda=1$ 有 $-48-4(3x+9)=-4+2(3-y)$，解得 $x=-7,y=1$.

解法四：相似矩阵有相同的特征值，$\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\-1&\lambda-y&-1\\-1&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-y)(\lambda-2)$，有特征值 $\lambda=-1,y,2$.

故有 $|-E-A|=-6(x+7)=0$，于是 $x=-7$.

而 $\begin{vmatrix}\lambda-4&-18&8\\1&\lambda+7&-4\\3&12&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$，有特征值 $\lambda=2,-1,1$，故 $y=1$.

4. 已知矩阵 $A,B\in\mathbf{R}^{3\times3}$，$A$ 有特征值 $-1,-2,2$，且有 $|A^{-1}B|=2$，求 $|B|$.

解：$|A^{-1}B|=|A^{-1}|\cdot|B|=|A|^{-1}|B|=2$，故 $|B|=2|A|=2*(-1)(-2)(2)=8$.

解法二：易知 A^{-1} 有特征值 $-1,-1/2,1/2$，故 $|A^{-1}|=(-1)(-1/2)(1/2)=1/4$.

于是 $2=|A^{-1}B|=|A^{-1}|\cdot|B|=|B|/4$，得 $|B|=8$.

5. 已知列向量 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}^n,(n>2)$，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，若 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2\\ \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2\end{pmatrix}$，证明：$\mathrm{r}(B)=2$.

证：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$，则 $B=A^{\mathrm T}A$. 若 x 满足 $Bx=\theta$，则 $x^{\mathrm T}Bx=(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=0$，故 $Ax=\theta$.

又 α_1,α_2 线性无关，故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2)=2$，故 $x=\theta$，于是 $Bx=\theta$ 只有零解，从而 $\mathrm{r}(B)=2$.

证法二：假设 $\mathrm{r}(B)\neq 2$，则 $|B|=\begin{vmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2\\ \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2-\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2=\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2-(\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2)^2=0$，

即 $(\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2)^2=\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2$. 柯西不等式 $(\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2)^2\le\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2$，当且仅当 α_1,α_2 成比例时等式成立，此即 α_1,α_2 线性相关，与条件矛盾，故 $\mathrm{r}(B)=2$.

二.(10分) 解方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3+4x_4 &=-11,\\ x_1+ax_2+2x_3-7x_4 &=7,\\ 3x_1-x_2-2x_3-5x_4 &=0.\end{cases}$

解：$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&3&-5&4&-11\\1&a&2&-7&7\\3&-1&-2&-5&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&-1&2&-3\\0&0&a+3&-2a-6&3a+8\end{array}\right)$.

当 $a=-3$ 时, $(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&-1&2&-3\\0&0&0&0&-1\end{array}\right)$, $\mathrm{r}(A)=2<\mathrm{r}(A,b)=3$，方程组无解.

当 $a\neq-3$ 时，$(A,b)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&(2a+5)/(a+3)\\0&1&0&0&-1/(a+3)\\0&0&1&-2&(3a+8)/(a+3)\end{array}\right)$, $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=2$，

方程组有无穷多组解，通解为 $x=\begin{pmatrix}(2a+5)/(a+3)\\-1/(a+3)\\(3a+8)/(a+3)\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $k\in\mathbf{R}$.

三.(10分) 设 $A\in\mathrm{R}^{2\times3},\mathrm{r}(A)=2$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix},b\neq\theta$，且有 $A\xi_1=2b,A\xi_2=3b$.

写出 $Ax=b$ 的通解并求特解 η 使得 $\eta^{\mathrm T}\eta=\min\{x^{\mathrm T}x\mid Ax=b\}$ (使得 $x^{\mathrm T}x$最小的解).

解：$A\xi_1=2b,A\xi_2=3b$，故设 $\eta=\xi_2-\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\alpha=3\xi_1-2\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$，

则有 $A\eta=A(\xi_2-\xi_1)=3b-2b=b,A\alpha=A(3\xi_1-2\xi_2)=6b-6b=\theta$.

又有 $\mathrm{r}(A)=2$，故 $Ax=\theta$ 的基础解系含1个向量，故 $Ax=b$ 的通解为 $x=\eta+k\alpha,k\in\mathbf{R}$.

由 $x^{\mathrm T}x=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-2+k)^2+(2-3k)^2+(1-k)^2=11k^2-18k+9=11(k-9/11)^2+18/11$，

当 $k=9/11$ 时，特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm T}$ 使得 $x^{\mathrm T}x$ 最小.

解法二：设 $\eta_1=\dfrac12\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac32\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac13\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac53\\1\\\frac23\end{pmatrix},\alpha=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}\frac16\\-\frac12\\-\frac16\end{pmatrix}$，

则有 $A\eta_1=A(\dfrac12\xi_1)=\dfrac12 2b=b,A\alpha=A(\eta_1-\eta_2)=b-b=\theta$，又 $\mathrm{r}(A)=2$,故通解为$x=\eta_1+k\alpha,k\in\mathbf{R}$.

令 $f(k)=x^{\mathrm T}x=(-\dfrac32+\dfrac k6)^2+(\dfrac12-\dfrac k2)^2+(\dfrac12-\dfrac k6)^2$，则 $f'(k)=\dfrac{11k}{18}-\dfrac76=0$，解得最小点 $k=\dfrac{21}{11}$，

代入通解得所求特解 $\eta=(-13/11,-5/11,2/11)^{\mathrm T}$.

四. (15分) 设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\8\\-1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-5\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\12\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\6\\-2\\4\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；

(2) 向量组中去掉一个向量，使得去掉该向量后向量组的秩减小.

解：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&0&3/2&0&-1/2\\0&1&-1/2&0&-1/2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$，一个极大无关向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

易知 $\alpha_3=\dfrac{3}{2}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\alpha_2,\alpha_5=-\dfrac{1}{2}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\alpha_2$.

(2) 从行简化梯形 B 可以看出，去掉 $(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 后，行简化梯形 B 的秩由3减为2，故去掉向量组中对应的向量 α_4 即可.

解法二：(1) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\to\begin{pmatrix}1&3&0&0&-2\\0&-2&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$，

易知 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 的一个极大无关向量组为 β_1,β_3,β_4，且有 $\beta_2=3\beta_1-2\beta_3,\beta_5=-2\beta_1+\beta_3$，
则对应 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关向量组为 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$，并有 $\alpha_2=3\alpha_1-2\alpha_3,\alpha_5=-2\alpha_1+\alpha_3$.

(2) 因为 β_4 不能由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_5$ 表示，故 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 表示，去掉 α_4 将使得向量组的极大无关组缩小，即秩减小.

五.(15分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\5&-4&-5\\-2&2&5\end{pmatrix}$.

(1) 计算 A 的特征值和特征向量；(2) 求一个2次多项式 $f(x)$，使得矩阵 $B=f(A)$ 有一个3重的特征值.

解：(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-1\\\lambda-1&\lambda+4&5\\0&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，解得特征值 $\lambda=1$(二重),2.

$\lambda=1$ 时，解方程组 $E-A\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $k_1\xi_1,\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$\lambda=2$ 时，解方程组 $E-A\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-5/2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量为 $k_2\xi_2,\xi_2=(4,5/2,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$，则 $f(A)=A^2-3A+2E$ 的特征值为 $f(1),f(1),f(2)$，即 $0,0,0$，故特征值为3重的0.

(2)的解法二：设 $f(x)=x^2+ax+b$，则 $f(A)=A^2+aA+bE$ 的特征值为 $f(1)=1+a+b=f(2)=4+2a+b$，
解得 $a=-3$，b 可取任意值，不妨取 $b=0$，则 $f(x)=x^2-3x$，得到3重的特征值为 $f(1)=f(2)=-2$.

(2)的解法三：因为 $(1-1.5)^2=0.25=(2-1.5)^2$，故取 $f(x)=(x-3/2)^2$，
则 $f(A)=(A-1.5E)^2=A^2-3A+2.25E$ 的特征值为 $f(1)=f(2)=0.25$，为3重特征值.

六.(10分) 设矩阵$A\in\mathbf{R}^{n\times n},\mathrm{r}(A)=n-1$,证明：$A^*=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$为列向量,且有$A\alpha=\theta,A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$.
(矩阵 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵)

证：$\mathrm{r}(A)=n-1$，我们有 $|A|=0$，且 $Ax=\theta$ 基础解系含1个向量，设为 $\alpha\neq\theta$，则 $A\alpha=\theta$.
因为 $AA^*=|A|E=O$，故 A^* 的列为 $Ax=\theta$ 的解，故有 $A^*=(k_1\alpha,\cdots,k_n\alpha)=\alpha(k_1,\cdots,k_n)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$.
又有 $A^*A=|A|E=O$，故 $A^{\mathrm{T}}(A^*)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\gamma\alpha^{\mathrm{T}}=O$，由 $\alpha\neq\theta$ 得 $A^{\mathrm{T}}\beta=\gamma=\theta$.

证法二：$\mathrm{r}(A)=n-1$，则$|A|=0$，A存在非零$n-1$阶子式，故$A^*\neq O$，从而 $\mathrm{r}(A^*)\geq1$.
因为 $AA^*=|A|E=O$，故 $0=\mathrm{r}(AA^*)\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A^*)-n=\mathrm{r}(A^*)-1$，故 $\mathrm{r}(A^*)\leq1$.
由 $\mathrm{r}(A^*)\geq1$ 和 $\mathrm{r}(A^*)\leq1$ 可得 $\mathrm{r}(A^*)=1$.
我们有分解 $A^*=P\begin{pmatrix}1&\\&O\end{pmatrix}Q=Pe_1e_1^{\mathrm{T}}Q=(Pe_1)(e_1^{\mathrm{T}}Q)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，
其中P,Q可逆，$\alpha,\beta^{\mathrm{T}}$分别为$P$的第一列和$Q$的第一行，且 $\alpha,\beta\neq\theta$.
$O=AA^*=A\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(A\alpha)\beta^{\mathrm{T}}$，$\beta\neq\theta$，故 $A\alpha=\theta$. 同理由 $A^*A=O$ 可得 $\beta^{\mathrm{T}}A=\theta^{\mathrm{T}}$，从而 $A^{\mathrm{T}}\beta=\theta$.

线性代数期中试卷 答案 (2021.11.20)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. $B=A^*$，计算 B 的所有代数余子式的和，即 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} B_{ij}$，此处 $A=\begin{pmatrix}0&0&4&5\\3&0&5&6\\3&0&13&16\\5&0&7&0\end{pmatrix}$.

解：$A\to\begin{pmatrix}1&0&3&12\\0&0&4&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{r}(A)=3$，由 $AA^*=|A|E=O$，$0=\mathrm{r}(O))=\mathrm{r}(AA^*)\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A^*)-4$，

故 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A^*)\leq 1$，于是 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4.$ 得 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} B_{ij}=0.$

解法二：$\mathrm{r}(A)=3, AA^*=|A|E=O$，故 $B=A^*$ 的列为 $Ax=\theta$ 的解，

故 $\mathrm{r}(B)\leq(Ax=\theta$的基础解系向量个数)=4-3=1，于是 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4.$ 得 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} B_{ij}=0.$

解法三：易知 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&A_{42}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4$，于是 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} B_{ij}=0.$

解法四：$A_{12}=-200, A_{22}=-100, A_{32}=100, A_{41}=0$，其余代数余子式因为含0列故均为0，

于是 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-200&-100&100&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $B_{ij}=0,i,j=1,2,3,4.$ 于是 $\sum\limits_{i,j=1}^{4} B_{ij}=0.$

2. 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&5&7\\1&3^2&5^2&7^2\\1&3^3&5^3&7^3\end{vmatrix}$.

解：范德蒙行列式 $D_5=(7-1)(7-3)(7-5)(5-1)(5-3)(3-1)=768.$

解法二：$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&4&6\\0&3\times2&5\times4&7\times6\\0&3^2\times2&5^2\times4&7^2\times6\end{vmatrix}=2\times4\times6\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&7\\2^2&5^2&7^2\end{vmatrix}=48\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&5\times2&7\times4\end{vmatrix}=768.$

3. 证明：如果 $A\xrightarrow{c}B$，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

证：一系列的列初等变换等价于右乘可逆矩阵，即 $B=AP$，P可逆，此表示B的列是A的列的组合，P的列为组合系数. 因为P可逆，故有 $A=BP^{-1}$，即A的列是B的列的组合，P^{-1}的列为组合系数.

证法二：易知 A 进行列初等变换得到 A_1，则 A_1 的列可以表示成 A 的列的组合，A_1 再进行列变换得到 A_2，则 A_2 的列可以由 A_1 的列表示，从而也可以由 A 的列表示，依次下去，A 经过一系列的列初等变换得到 B，则 B 的列可由 A 的列表示出来.

由于列初等变换有逆变换，故 B 也可以经过一系列的列初等变换得到 A，故 A 的列可由 B 的列表示，A、B 的列可以相互表示，则 A 与 B 的列向量组等价.

4. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$A^k=O$，$k>1$ 是正整数，证明：$E-A$ 可逆.

证：$(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})=E+A+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k=E-A^k=E$，故 $E-A$ 可逆.

证法二：反证法，假设 $E-A$ 不可逆，则存在 $\xi\neq\theta$，使得 $(E-A)\xi=\theta$，即 $A\xi=E\xi=\xi$，

于是 $A^k\xi=A^{k-1}A\xi=A^{k-1}\xi=\cdots=A\xi=\xi\neq\theta$，但是 $A^k\xi=O\xi=\theta$，矛盾，故 $E-A$ 可逆.

证法三：设 λ 为 A 的任意特征值，则 λ^k 是 $A^k=O$ 的特征值，故 $\lambda^k=0$，从而 $\lambda=0$，

于是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$ 则 $|E-A|=(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n)=1\neq0$，故 $E-A$ 可逆.

5. $\eta=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 的特征向量，计算 a,b 与 A 的所有特征值，此处：$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&a&b\\1&b&2\end{pmatrix}$.

解：因为 $A\eta=\lambda\eta$，即 $(4,a+b+1,b+3)^{\mathrm{T}}=(\lambda,\lambda,\lambda)^{\mathrm{T}}$，解得 $\lambda=4,b=1,a=2$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0，故特征值为 \lambda=1(二重),4.$$

二.(12分) 计算矩阵 X 使得 $\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

解：方程写成 $AXB=C$，则有 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0.5&-0.5&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0.5&-0.5&1\end{array}\right)，故 A^{-1}=\begin{pmatrix}0.5&-0.5&0\\0&1&-1\\0.5&-0.5&1\end{pmatrix}.$$

同理可得 $B^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}4&2&0\\2&4&0\\1&2&3\end{pmatrix}$. 故 $X=A^{-1}CB^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&4&-3\\2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\-1/6&2/3&-1/2\\1/3&-1/3&1/2\end{pmatrix}$.

解法二：方程写成 $AXB=C$，先解方程 $AY=C$，有

$$(A,C)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&1&-1&1&0\\-1&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-0.5&0\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&1&-1.5&1\end{array}\right)，故 Y=\begin{pmatrix}1&-0.5&0\\-1&2&-1\\1&-1.5&1\end{pmatrix}.$$

再解方程 $XB=Y$，
$$\begin{pmatrix}B\\Y\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}2&-1&0\\-1&2&0\\0&-1&2\\\hline 1&-0.5&0\\-1&2&-1\\1&-1.5&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1/2&0&0\\-1/6&2/3&-1/2\\1/3&-1/3&1/2\end{array}\right)，故 X=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\-1/6&2/3&-1/2\\1/3&-1/3&1/2\end{pmatrix}.$$

三.(14分)

(1) 计算矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$的秩,计算$A$列向量组的一个极大线性无关组,并用以表示其余向量(6分)；

(2) 判断 $Ax=b$ 解的存在性，如有解则计算其通解(8分).

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1&-1\\1&2&0&-1&-4\\0&-1&-1&1&1\\-1&-1&1&0&3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-4\\2\\4\\-6\end{pmatrix}.$$

解：(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1&-1\\1&2&0&-1&-4\\0&-1&-1&1&1\\-1&-1&1&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&1&-2\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

故一个极大无关组为：α_1,α_2，并且有 $\alpha_3=-2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=-2\alpha_1-\alpha_2$.

(2) $(A,b)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&1&-2&10\\0&1&1&-1&-1&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$,

$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)$，故有解，其中一个特解为：$\eta=(10,-4,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，对应齐次方程组的
基础解系为：$\beta_1=(2,-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-1,1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(2,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，
$Ax=b$ 的通解为 $\eta+k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3,k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$.

解法二：$(A,b)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&1&-2&10\\0&1&1&-1&-1&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$ (*)，

(1) 由(*)式的系数部分可知，一个极大无关组为：α_1,α_2，并且有
$\alpha_3=-2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=-2\alpha_1-\alpha_2$.

(2) 由(*)式知 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)$，故有解，其中一个特解为：$\eta=(10,-4,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，对应齐次方程组的
基础解系为：$\beta_1=(2,-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-1,1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(2,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，
$Ax=b$ 的通解为 $\eta+k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3,k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$.

四. (10**分**) A 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(A)=r>0$，证明必有 m 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 n 维向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，使得 $A=\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm T}$.

证：因为 $\mathrm{r}(A)=r>0$，故有可逆矩阵 $P\in\mathrm{R}^{m\times m}$ 和 $Q\in\mathrm{R}^{n\times n}$ 使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}Q$.

按列分块：$P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),Q^{\mathrm T}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，

则有 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \beta_n^{\mathrm T}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm T}\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm T}$.

证法二：因为$\mathrm{r}(A)=r>0$，故可进行一系列的行初等变换化成行简化梯形$B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm T}\\ O\end{pmatrix}$，$\beta_1^{\mathrm T},\cdots,\beta_r^{\mathrm T}$非零.

此变换等价于 A 左乘一个可逆矩阵 P，即 $PA=B$，于是有 $A=P^{-1}B$，将 P^{-1} 按列分块得

$P^{-1}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，则有$A=P^{-1}B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm T}\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm T}$.

证法三：按列分块 $A=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，因为 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}=r>0$，故极大无关组含$r$个向量，设一个极大无关组为 $\gamma_{k_1},\cdots,\gamma_{k_r}$，记为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，则它可以表示所有列向量，

设为 $\gamma_j=b_{1j}\alpha_1+\cdots+b_{rj}\alpha_r,j=1,2,\cdots,n$，再设 $B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \beta_r^{\mathrm T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \cdots & & & \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn}\end{pmatrix}$，

则 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)B=\alpha_1\beta_1^{\mathrm T}+\alpha_2\beta_2^{\mathrm T}+\cdots+\alpha_r\beta_r^{\mathrm T}$.

五.(10**分**) $\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$ 为 n 维向量，$A=\alpha\alpha^{\mathrm T}$，计算 A 的 n 个线性无关的特征向量.

解：$A=\alpha\alpha^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}1\,1\cdots 1\\ 1\,1\cdots 1\\ \vdots\ \vdots\quad \vdots\\ 1\,1\cdots 1\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ \lambda-1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda-1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$，

故 A 的特征值为 $\lambda=n,0(n\text{-}1\text{重})$.

当 $\lambda=n$ 时，$nE-A=\begin{pmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & -1\\ 0 & 1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=0$ 时，$0E-A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$.

因为 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=n\neq 0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 即为 n 个无关特征向量.

解法二：因为 $A\alpha=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)=n\alpha$，故 $\alpha_1=\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$ 为特征值 n 的特征向量.

$A=\alpha\alpha^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，故$Ax=\theta$有基础解系$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix}-1\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$，

即为0的无关特征向量. 又 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=n\neq 0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 即为 A 的 n 个无关特征向量.

六.(14分) $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$A\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,$
$A\alpha_3=-2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$. 计算 A 的特征值与特征向量(用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合表示).

解：$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,-2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 P 可逆，

于是有 $A=P^{-1}BP$，即 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征值.

$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&2\\2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-3)^2$，故特征值为 $\lambda=-3,3$(二重).

当 $\lambda=-3$ 时，$-3E-B=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=3$ 时，$3E-B=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，无关特征向量为 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

因为由 $B\eta=\lambda\eta$ 可得 $AP\eta=PB\eta=\lambda P\eta$，

故 A 有特征值 $\lambda=-3$，对应无关特征向量 $\xi_1=P\eta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，特征向量为$k_1\xi_1$.

特征值$\lambda=3$(二重)，对应无关特征向量$\xi_2=P\eta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\xi_3=P\eta_3=-\alpha_1+\alpha_3$，特征向量为$k_2\xi_2+k_3\xi_3$.

解法二：由条件 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3个线性无关的3维向量，故任意3维向量都可以由这3个向量表示.

设 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\neq\theta$ 是 A 的特征向量，则有 $A\xi=\lambda\xi$.

将 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3, A\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3, A\alpha_3=-2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$

代入 $A\xi=\lambda\xi$ 得 $(k_1-2k_2-2k_3-\lambda k_1)\alpha_1+(-2k_1+k_2-2k_3-\lambda k2)\alpha_2+(-2k_1-2k_2+k_3-\lambda k_3)\alpha_3=\theta$.

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故组合系数为零，即$\begin{pmatrix}1-\lambda&-2&-2\\-2&1-\lambda&-2\\-2&-2&1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=B\eta=\theta$.

由于 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\neq\theta$，故 k_1,k_2,k_3 不全为零，即 $\eta=(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}\neq\theta$.

因为 $B\eta=\theta$ 要求非零解 η，故必须满足 $|B|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-2\\-2&1-\lambda&-2\\-2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+3)(\lambda-3)^2=0$.

故必须有 $\lambda=-3,3$(二重).

当 $\lambda=-3$ 时，$B=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\xi_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\eta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则 $c_1\xi_1, c_1\neq 0$ 为特征向量.

当 $\lambda=3$ 时，$B=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令$\xi_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\eta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\xi_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\eta_3=-\alpha_1+\alpha_3$,则$c_2\xi_2+c_3\xi_3, c_2,c_3\neq 0$为特征向量.

院系______ 班级______ 学号______ 姓名______

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

密 封 线

南京大学数学系 2022 – 2023 学年第 1 学期

线性代数（第一层次）期中试卷

考试日期：2022 年 11 月 12 日（120 分钟）

题 号	一	二	三	四	五	六	合 计	阅卷教师
得 分								

一、简答与计算（本题共 6 小题，每小题 8 分，共 48 分）

1、计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

1. • 大部分正确. • 若中间过程有问题 酌情给分(2-4)

评分标准： $D = 128$。变换过程 4 分，上（下）三角行列式计算正确 4 分。

2、计算 $(A^*)^*$，此处

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. • 可直接按定义计算 A^*, $(A^*)^*$. • 写出 $|A|=0$ $AA^* = |A| \cdot E$ 给 2-3 分

评分标准： $r(A) = 3$（4 分），$(A^*)^* = 0$（4 分）。

3、计算以下向量组的一个极大线性无关组，并用以表示其余向量，此处：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. · 很少有错 • 极大无关组不唯一

评分标准： 行变换过程（2 分）；极大线性无关组（3 分）：含有 2 个的线性无关向量，例如 α_1, α_2；线性表出（3 分），例如 $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2$。

4、向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 与 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$ 等价，证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，此处

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{ij})_{k\times n} = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_k^T \end{pmatrix}$$

评分标准： 由向量组等价性可知，存在 $C = (c_{ij})_{k\times m}$ 与 $D = (d_{ij})_{m\times k}$，使得 $CA = B$（2 分），$DB = A$（2 分）。$Ax = 0 \Rightarrow Bx = CAx = 0$（2 分）；$Bx = 0 \Rightarrow Ax = DBx = 0$（2 分）。

5、计算矩阵 X 使得 $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

• 最后结果差不多对 差别 1-2 个元素, 扣 2 分.

评分标准： 列变换过程 3 分；计算结果 5 分。$X = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 3/2 \\ 5/2 & 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

6、α_1、α_2、α_3 线性相关，α_2、α_3、α_4 线性无关。证明 α_1 可由 α_2 与 α_3 线性表出，α_4 不能由 α_1、α_2 与 α_3 线性表出。

评分标准： 由 α_2、α_3、α_4 线性无关可知 α_2、α_3 线性无关（3 分），$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，故 α_1 可由 α_2 与 α_3 表出（3 分）。由 α_1 可由 α_2 与 α_3 线性表出可知：如果 α_4 能由 α_1、α_2 与 α_3 表出，则 α_4 能由 α_2 与 α_3 表出，矛盾（2 分）

易（很少有错误）

二、（10 分）

A 是 n 阶实矩阵，$A^TA = AA^T$。证明：如果 A 是三角矩阵，则 A 必为对角矩阵。

评分标准： 设 A 上三角，假对 n 归纳：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (A^TA)_{11} = a_{11}^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = (AA^T)_{11}$$

故 $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$。写出 $(A^TA)_{11}$（2 分），写出 $(AA^T)_{11}$（2 分），比较二者得出 $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$（4 分）由 $A = diag(a_{11}, B)$ 可知 $B^TB = BB^T$ 与 B 上三角可知 B 对角（2 分）。不同证明方法酌情评分。

• 直接设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 比较 $AA^T = A^TA$ 的对角线元素, 可得.

• A 是上三角或下三角都对

三、（12 分）

给定矩阵 $A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)$ 与向量 β，（1）计算 $Ax = 0$ 的基础解系，并据此表示出所有基础解系（6 分）；（2）计算 $Ax = \beta$ 的通解（3 分）；（3）$r(A) = r$，是否存在列满秩矩阵

$B = (b_{ij})_{n\times r}$ 使得 $r(AB) = 0, 1, 2$？如果存在，试各写出一个这样的矩阵（3 分）。

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_5 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \beta = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

评分标准：行变换 $(A\ \beta)$ 至行简化梯形（4 分）；基本解组例如 $\eta_1 = (-1, -1, 0, 2, 0)^T$，$\eta_2 = (0, -1, -1, 0, 2)^T$（2 分）；基本解组可表为 $(\gamma_1\ \gamma_2) = (\eta_1\ \eta_2)C$，$C$ 可逆（2 分）。$Ax = \beta$ 的通解，例如 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + (0, 0, 0, 0, 1)^T$（3 分）。满秩矩阵 B 使得 $r(AB) = 0, 1, 2$，例如：$B = [\eta_1\ \eta_2]$，$B = [\eta_1 e_1]$，$B = [e_1\ e_2]$（各 1 分）。

B − 5×3矩阵. r(AB) = 0 不可能 × −1分

r(AB) = 1 取 B = (η₁ η₂ e₁) −1分

r(AB) = 2 取 B = (η₁ e₁ e₂) −1分

四、(10 分)

$B = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$ 是可逆矩阵，$B^{-T} = (\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)$，$A = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_k\beta_k^T$（$k < n$），$b$ 是 n 维向量。（1）证明 $Ax = b$ 有解当且仅当 b 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 的线性组合（5 分）；（2）对于 $b = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$，$c_i = \beta_i^T\beta_i$，写出 $Ax = b$ 的通解（5 分）。

评分标准：（1）⇒：$b = Ax = (\beta_1^T x)\alpha_1 + (\beta_2^T x)\alpha_2 + \cdots + (\beta_k^T x)\alpha_k$（2 分）；⇐：$b = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k$，$c = (c_1, \cdots, c_k)^T$），$C = (\beta_1\ \cdots\ \beta_k)^T$ 行满秩，$r(C) = r(C\ c) = k$，$Cx = c$ 有解，故 $Ax = b$ 有解（3 分）。（2）$B^{-1}B = E$ 可知 $\beta_i^T\alpha_j = 0$（$i \neq j$），$\beta_i^T\alpha_i = 0$，$A\alpha_j = \alpha_j$（$j \le k$）（2 分）；$A\alpha_j = 0$（$j > k$），$Ab = b$（1 分）。$\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$ 为基础解系（2 分）。

• $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A\ b)$ — 2分

但 $r(A) = r(A\ b) \cancel{\Leftrightarrow}$ b 是 $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ 组合

五、(10 分)

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\-1 & 2 & -2\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$，计算 $B = P^{-1}AP$ 与 $A^3 + A^2 + A + E$。

评分标准：$B = P^{-1}AP = diag(1, -1, 0)$（2 分），$B^3 + B^2 + B + E = diag(4, 0, 1)$（2 分），

$$A^3 + A^2 + A + E = P(B^3 + B^2 + B + E)P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 4 & -4\\-1 & 5 & -4\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$（6 分）

• $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ — 2分

• 可直接计算 $A^3 + A^2 + A + E$.

若中间过程对，只结果错 给7-8分.

六、(10 分)

$A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{k\times n}$，β 为 m 维向量，γ 为 k 维向量。对以下两个问题给出判断，并给出证明或举出反例。（1）如果 $Ax = \beta$ 与 $Bx = \gamma$ 同解，那么 $(A\ \beta)$ 与 $(B\ \gamma)$ 行向量组是否等价？（2）如果 $(A\ \beta)$ 与 $(B\ \gamma)$ 行向量组等价，那么 $Ax = \beta$ 与 $Bx = \gamma$ 是否同解？

评分标准：$Ax = \beta$ 与 $Bx = \gamma$ 有相同解（有解），$Ax = \beta$ 与 $Ax = \beta, Bx = \gamma$ ~~通~~同解 ···（4 分）。$(A\ \beta)$ 与 $(B\ \gamma)$ 行向量组等价，则有矩阵 C 与 D，$(A\ \beta) = C(B\ \gamma)$，$D(A\ \beta) = (B\ \gamma)$ ···（2 分），答出 $r(A) = r(A\ \beta)$ 时二者同解给 2 分，答出 $r(A) \neq r(A\ \beta)$ 情形给 2 分。

• $Ax = \beta$ 与 $Bx = \gamma$ ⟶ 初等变换得行等价. — 2分

• 第2问 写出 无解时，结论得不到. — 4-5分

$A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\0&4&0\\1&-2&5\end{pmatrix}$ $\qquad A\sim \mathrm{diag}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\cdots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ maybe

1\. $|\lambda-AE|=0$

$$\begin{vmatrix}\lambda-5&2&-1\\0&\lambda-4&0\\-1&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-5&-1\\-1&\lambda-5\end{vmatrix}=\overset{(\lambda-4)}{[(\lambda-5)^2-1]}=(\lambda-6)(\lambda-4)^2$$

$\lambda_1=6 \quad \lambda_2=4$ (二重根)

2\. 对 $\lambda_1=6$，解 $|6E-A|x=0$

$$(6E-A)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\in\lambda_1=6$ 的特征向量 $k_1\alpha_1$，$k\in\mathbb{R}$ 且 $k\neq0$.

对 $\lambda_2=4$，解 $|4E-A|x=0$

$$\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&0&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\in\lambda_2=4$ 的 --- $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，$k_2k_3\in\mathbb{R}$ 且不全为 0.

$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&0&2\\3&-4&5\end{pmatrix}$ $\qquad A\nsim \mathrm{diag}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\cdots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\-2&\lambda&-2\\-3&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-2)^2$$

$\lambda_1=4 \quad \lambda_2=2$ (2重根)

对 $\lambda_1=4$ $\quad$ 解 $(\lambda_1E-A)x=0.$ $\quad (\lambda E-A)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&4&-2\\-3&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \alpha_{11}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad k_{11}\alpha_{11}\qquad k_{11}\in\mathbb{R},k_{11}\neq0$

对 $\lambda_2=2$ $\quad$ 解 $(\lambda_2E-A)x=0$ $\quad (\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-2&2&-2\\-3&4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \alpha_{21}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad k_{21}\alpha_{21}\qquad k_{21}\in\mathbb{R},k_{21}\neq0.$

例 3. 求如下矩阵 A 的特征值和特征向量:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

解. 计算特征多项式得:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5).$$

求特征方程的根得: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2+i$, $\lambda_3=2-i$.

对 $\lambda_1=1$, 解方程组 $(E-A)x=0$:

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一基础解系: $\alpha_{11}=(-1\ 0\ 1)^T$.

故属于 $\lambda_1=1$ 的所有特征向量为 $k_{11}\alpha_{11}$, k_{11} 为任意非零常数。

对于 $\lambda_2=2+i$, 解方程组 $((2+i)E-A)x=0$:

$$\begin{pmatrix}i&1&-1\\-1&1+i&-1\\-1&1&i\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-i&i\\0&1&-1+i\\0&1-i&2i\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1+i\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一基础解系: $\alpha_{21}=(1\ 1-i\ 1)^T$. 故属于 $\lambda_2=2+i$ 的所有特征向量为 $k_{21}\alpha_{21}$, k_{21} 为任意非零常数。

对于 $\lambda_3=2-i$, 由于 $((2+i)E-A)\alpha_{21}=0$, 两边取共轭可得:

$$((2-i)E-A)\overline{\alpha_{21}}=0.$$

故 $\alpha_{31}=(1\ 1+i\ 1)^T$ 是 $\big((2-i)E-A\big)x=0$ 的非零解。

因为 $r\big((2+i)E-A\big)=r\big((2-i)E-A\big)=2$,

α_{31} 构成 $\big((2-i)E-A\big)x=0$ 的一个基础解系,

从而属于 $\lambda_3=2-i$ 的所有特征向量为 $k_{31}\alpha_{31}$, k_{31} 为任意非零常数。

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=2+i \quad \lambda_3=2-i$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1-i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1+i\\1\end{pmatrix},\quad (\alpha_{11}\ \alpha_{21}\ \alpha_{31})=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1-i&1+i\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

44. 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r$ 充要条件是存在两个矩阵 $\boldsymbol{P}_{m\times r},\boldsymbol{Q}_{r\times n}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}$, 其中 $\mathrm{r}(\boldsymbol{P}_{m\times r})=\mathrm{r}(\boldsymbol{Q}_{r\times n})=r$.

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}(E_r\ \ 0)$$

$$A=P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}(E_r\ 0)Q_1^{-1}$$

$$P=P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}\qquad Q=(E_r\ 0)Q^{-1}.$$

44. 因为 $r(A)=r$,
故存在 m 阶可逆阵 P_1 以及 n 阶可逆阵 Q_1 使得

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r\\ O\end{pmatrix}(E_r\ \ O),$$

亦即

$$A=P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_r\\ O\end{pmatrix}(E_r\ \ O)Q_1^{-1}.$$

令

$$P=P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_r\\ O\end{pmatrix},\qquad Q=(E_r\ \ O)Q_1^{-1},$$

则 P 为 $m\times r$ 阵, Q 为 $r\times n$ 阵, $r(P)=r(Q)=r$, 且

$$A=PQ.$$

39. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_m$, $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$, 求证 $m=n$ 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

39. 若 $m\neq n$, 不妨设 $m<n$. 于是

$$r(A)\le m<n,\qquad r(B)\le m<n,$$

由于 $BA=E_n$, 我们有

$$n=r(BA)\le\min\{r(A),r(B)\}\le m,$$

这与 $m<n$ 矛盾。故有 $m=n$. 又因为

$$AB=BA=E_n,$$

故 A,B 均可逆且 $A^{-1}=B$.

57. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$, 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 有相同的秩.

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$\therefore\ r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\cdots,\beta_n).$

9. 证明: 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ 与方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ 是同解方程组的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

9. $A^T y = b$ 有解 $\Leftrightarrow r\left(A^T \; b\right) = r\left(A^T\right)$. 而

$$r\left(A^T \; b\right) = r\left(A^T\right) \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} = r(A).$$

若两个方程同解，则有

$$n - r\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} = n - r(A),$$

亦即

$$r\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} = r(A).$$

反之，若

$$r\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} = r(A),$$

则 b^T 可以由 A 的行向量线性表示，故两个方程组同解。

10. 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ 的一个基础解系是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$，求 $(\boldsymbol{A} \;\; \boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\theta}$ 的一个基础解系, 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

$(A \;\; A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\therefore Ax + Ay = 0$ 相反数

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}. \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_r \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \cancel{\alpha_1} & \cancel{\alpha_2} & \cancel{\cdots} & \cancel{\alpha_r} & e_1 & \cdots & e_n \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cancel{-e_1} & \cancel{\cdots} & \cancel{-e_n} \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} B & * \\ 0 & E_n \end{vmatrix}$ B是个$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$的非0子式

$n+r$ 阶

$r(\cdots) = n+r$

$\therefore \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ -e_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} e_n \\ -e_n \end{pmatrix}$ 线性无关

8'

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-\lambda\end{pmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B=\begin{pmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{pmatrix}$，求参数 λ .

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-\lambda\end{pmatrix}$ 经过多次初等行变换和列变换得到 $B=\begin{pmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{pmatrix}$，求参数 λ .

解：做初等行变换，$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}$, $B\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&7&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,秩相等得 $\lambda=1$.

解法二：$|B|=0\Rightarrow|A|=\lambda-1=0$，$\therefore\ \lambda=1$.

解法三：$B\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&7&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$，$\therefore\ \lambda=1$.

$B=\begin{pmatrix}-5&17&6\\-7&0&5\\13&9&-8\end{pmatrix}$

$\overset{62}{=}-7\times6\times9+5\times13\times17$

$-8\times\ \times17+\underset{25}{\underline{5\times5}}\times9=0$

-17×9 56 65

42 25 17

$|A|=-\lambda+1-2+2\lambda=\lambda-1=0$

$\lambda=1$

8'

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&n-1\\n&&&&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，其中 $n\ge2$，求 C^{-1}.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&&&\\&0&2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&n-1\\n&&&&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，其中 $n\ge2$，求 C^{-1}.

解：$(A,E)\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&&&&&0&&&&1/n\\&1&&&&1&0&&&\\&&1&&&&1/2&0&&\\&&&\ddots&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&&&&1/(n-1)&0\end{array}\right)$, $\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}0&&&&1/n\\1&0&&&\\&1/2&0&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1/(n-1)&0\end{pmatrix}$,

$B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$, $C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$.

$C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\\&B^{-1}\end{pmatrix}$

$(BE)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}6&3&3&0\\5&3&0&\cancel{1}\end{array}\right)$

$=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\5&3&0&1\end{array}\right)$ -5

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&3&-15&6\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&1&-5&2\end{array}\right)$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$

8'

3. 设 $A \in \mathrm{R}^{3\times 3}, |A| \neq 0$，且有 $A_{ij} = 2a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$，其中 A_{ij} 为矩阵元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $|A^*|$.

3. 设 $A \in \mathrm{R}^{3\times 3}, |A| \neq 0$，且有 $A_{ij} = 2a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$，其中 A_{ij} 为矩阵元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $|A^*|$.

解：$A^* = 2A^{\mathrm{T}}, 2A^{\mathrm{T}}A = A^*A = |A|E$，取行列式，$2^3|A|^2 = |2A^{\mathrm{T}}A| = |A|^3$.

因为 $|A| \neq 0$，故$|A| = 8$，于是有 $|A^*| = |2A^{\mathrm{T}}| = 8|A| = 64$.

解法二：$|A| \neq 0$，则$|A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^2$，又有$|A^*| = |2A^{\mathrm{T}}| = 8|A|$，故$|A| = 8$，且$|A^*| = 8|A| = 64$.

$A^*A = |A|E$ $\qquad$ $|A^*| = |A|^2$.

$= |A|$

$A_{ij} = 2a_{ij}$

$A^* = 2A^T$ $\qquad$ $|A^*| = 8|A| = |A|^2$

$|A| = 8$

$|A^*| = 64$.

4'

设矩阵 $A = MN^{\mathrm{T}}$，其中 $M, N \in \mathrm{R}^{n\times r}\ (r \leq n), |N^{\mathrm{T}}M| \neq 0$. 证明：$\mathrm{r}(A^2) = \mathrm{r}(A)$.

4. 设矩阵 $A = MN^{\mathrm{T}}$，其中 $M, N \in \mathrm{R}^{n\times r}\ (r \leq n), |N^{\mathrm{T}}M| \neq 0$. 证明：$\mathrm{r}(A^2) = \mathrm{r}(A)$.

证：$|N^{\mathrm{T}}M| \neq 0, (N^{\mathrm{T}}M)^3$可逆，

故 $r = r((N^{\mathrm{T}}M)^3) = r(N^{\mathrm{T}}A^2M) \leq r(A^2M) \leq r(A^2) \leq r(A) \leq r(M) \leq r$，从而 $\mathrm{r}(A^2) = \mathrm{r}(A)$.

证法二：$|N^{\mathrm{T}}M| \neq 0 \Rightarrow r = \mathrm{r}(N^{\mathrm{T}}M) \leq \mathrm{r}(N^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(N) \leq r$，$\therefore\ \mathrm{r}(N) = r, \mathrm{r}(M) = r$.

M, N 列满秩，有 $M = P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}, N = Q\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$，其中 P, Q 可逆.

于是有 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}(E_r, O)Q^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(P\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} E_r & \\ & O \end{pmatrix} = r$.

$A^2 = MN^{\mathrm{T}}MN^{\mathrm{T}} = (M)((N^{\mathrm{T}}M)N^{\mathrm{T}}) = M\tilde{N}^{\mathrm{T}}$，$|N^{\mathrm{T}}M| \neq 0 \Rightarrow (N^{\mathrm{T}}M)$ 可逆，

故 $\mathrm{r}(\tilde{N}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}((N^{\mathrm{T}}M)N^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(N^{\mathrm{T}}) = r$，且 $\tilde{N}^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{r\times n}$，于是也有 $\mathrm{r}(A^2) = \mathrm{r}(M\tilde{N}^{\mathrm{T}}) = r$，

从而 $\mathrm{r}(A^2) = \mathrm{r}(A)$.

$r = r(N^TM) \leq r(N^T) = r(N) \leq r$

$\therefore r(N) = r(M) = r$

$M = P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $N = Q\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$

$r(A) = r\left(P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}(E_r, 0)Q^T\right)$

$= r\left(P\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q^T\right)$

$= r\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix} = r$

$r(A) = r(MN^T) = r(N^TM) = r$.

$A^2 = MN^TMN^T$

$= M(\underline{N^TMN^T})$

P. 可逆.

$r(\tilde{N}^T) = r((N^TM)N^T) = r(N^T) = r$.

$r(A^2) = r(M\tilde{N}^T) = r$.

$r(A^2) = r(A)$ 可逆

8'

5. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. ($D$的元素$a_{ij} = \begin{cases} i+j-1, & 当i+j \le n+1, \\ 2n+1-i-j, & 当i+j > n+1. \end{cases}$)

5. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. ($D$的元素$a_{ij} = \begin{cases} i+j-1, & 当i+j \le n+1, \\ 2n+1-i-j, & 当i+j > n+1. \end{cases}$)

解：$D \xlongequal[i=n-1,\cdots,2]{r_{i+1}-r_i} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

依次按最后一行展开：$D = (-1)^{(n+1)+n+\cdots+3} 2^{n-2}(n+1) = (-1)^{n(n-1)/2} 2^{n-2}(n+1)$.

10'

二.(10分) 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；

(2) 在4维列向量组 e_1, e_2, e_3, e_4 中找出所有不能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性表示的向量，其中 $e_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, e_2 = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}, e_3 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, e_4 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

二.(10分) 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1)求一个极大无关组，并用极大无关组表示其余向量；

(2) 在4维列向量组 e_1, e_2, e_3, e_4 中找出所有不能被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性表示的向量，其中 $e_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, e_2 = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}, e_3 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, e_4 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 | e_1, e_2, e_3, e_4) \to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1.5 & -2/3 & -5/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

(1) 一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$，且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 - 1.5\alpha_2 + 1.5\alpha_4$,

(2) 第4行分量非零的向量不能表示，即向量 e_1, e_2, e_4.

解法二：(1) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

一个极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$，且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 - 1.5\alpha_2 + 1.5\alpha_4$,

(2) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 | e_1, e_2, e_3, e_4) \to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -5/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

第4行分量非零的向量不能表示，即向量 e_1, e_2, e_4.

46'

56'

三.(10分) 设 $A \in \mathrm{R}^{3\times3}$，$A$ 的第一列为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，且 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $(A-2E)x = \theta$ 的非零解，求 A.

10

三.(10分) 设 $A \in \mathrm{R}^{3\times3}$，$A$ 的第一列为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，且 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

是齐次线性方程组 $(A-2E)x = \theta$ 的非零解，求 A.

解：$Ae_1 = \alpha_1, A\xi_1 = 2\xi_1, A\xi_2 = 2\xi_2$，故 $A(e_1, \xi_1, \xi_2) = (\alpha_1, 2\xi_1, 2\xi_2)$，

$$A = (\alpha_1, 2\xi_1, 2\xi_2)(e_1, \xi_1, \xi_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$Ae_1 =$

解法二：设 $A = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} \\ -1 & a_{22} & a_{23} \\ -1 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，由 $(A-2E)\xi_i = \theta, i = 1, 2$，

得 $\begin{cases} 3a_{12} + a_{13} = 0, \\ 3a_{22} + a_{23} = 9, \\ 3a_{32} + a_{33} = 5, \\ -2a_{12} - a_{13} = 0, \\ -2a_{22} - a_{23} = -3, \\ -2a_{32} - a_{33} = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_{12} = a_{13} = 0, \\ a_{22} = 6,\ a_{23} = -9, \\ a_{32} = 4,\ a_{33} = -7. \end{cases}$ 故 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

解法三：$(A-2E)(\xi_1, \xi_2) = O$，故 $\begin{pmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(A-2E)^{\mathrm{T}} = O$，即 $(A-2E)^{\mathrm{T}}$ 的列为方程组 $\begin{pmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} x = \theta$ 的解.

$\begin{pmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 4/9 \end{pmatrix}$，通解为 $x = k\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$. 易知 $(A-2E)^{\mathrm{T}}$ 的第一行为 $(0, -1, -1)$，

故 $(A-2E)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}$，最后有 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

15'

四.(15分) 设下列非齐次线性方程组有3个线性无关的解向量：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 + 7\mu x_4 = -2, \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases}$$

(1) 求出该方程组系数矩阵的秩；(2) 求出参数 λ, μ 的值以及方程组的通解.

(1) 求出该方程组系数矩阵的秩；(2) 求出参数 λ, μ 的值以及方程组的通解.

解：(1) $(A, b) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 7\mu+2-3\lambda & \lambda-3 \end{array}\right)$，无关解向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

易知 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是 $Ax = \theta$ 的两个无关解，故 $r(A) = 2$.

(2) 由 $r(A) = 2$ 知 $\lambda = 3, \mu = 1$. 令 $x_3 = x_4 = 0$得一个特解$\eta = (-1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，

对应齐次方程组的基础解系为 $\beta_1 = (-1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，通解为 $\eta + k_1\beta_1 + k_2\beta_2$.

71'

15'

五.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量；(2) 计算矩阵 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

五.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

(1) 计算矩阵 A 的特征值和特征向量；(2) 计算矩阵 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值和特征向量.

解：(1) $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+4)^2$，故特征值 $\lambda=2,-4$(二重).

$\lambda=2$，特征向量为 $k_1\xi_1$, $\xi_1=(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

$\lambda=-4$，特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$, $\xi_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) $|A|=32$，令 $B=A^2+A^*+2E=A^2+32A^{-1}+2E$，$B\xi_1=(2^2+32*(1/2)+2)\xi_1=22\xi_1$,

$B\xi_2=10\xi_2, B\xi_3=10\xi_3$，故 $B^{-1}\xi_1=(1/22)\xi_1, B^{-1}\xi_2=(1/10)\xi_2, B^{-1}\xi_3=(1/10)\xi_3$.

于是 $(A^2+A^*+2E)^{-1}$ 的特征值为 $1/22, 1/10, 1/10$，对应特征向量为 ξ_1,ξ_2,ξ_3.

86'

六.(10分) 设矩阵 $A\in \mathrm{R}^{m\times n}, \mathrm{r}(A)<n$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系，矩阵 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in \mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

六.(10分) 设矩阵 $A\in \mathrm{R}^{m\times n}, \mathrm{r}(A)<n$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系，矩阵 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in \mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

证：只要证明 $\mathrm{r}\begin{pmatrix} A \\ N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=n$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}x=\theta$ 只有零解.

因为解满足 $Ax=\theta$，故x为基础解系的组合，从而存在s维向量 y 使得 $x=Ny$.

又 x 满足$N^{\mathrm{T}}x=\theta$，即 $N^{\mathrm{T}}Ny=\theta$，故 $x^Tx=y^TN^TNy=0$，于是 $x=\theta$ 为零解，结论得证.

证法二：易知 $\mathrm{r}(A)=n-s$，取 A^{T} 列的极大无关组 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-s}$，令 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-s})$，则有 $B^{\mathrm{T}}N=O$.

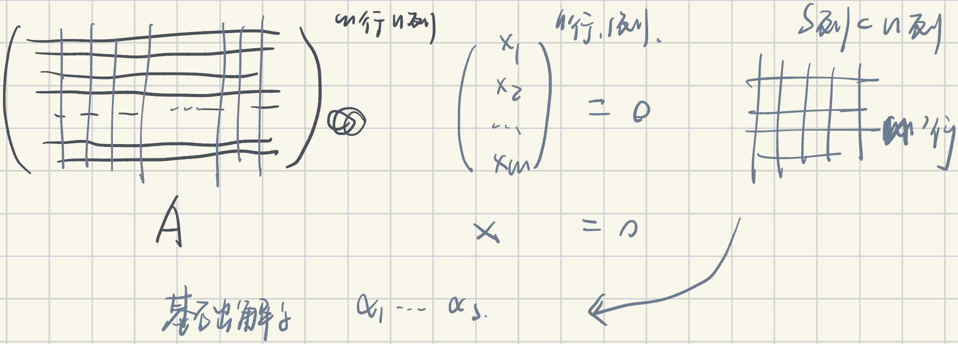
考虑 $k_1\beta_1+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}+t_1\alpha_1+\cdots+t_s\alpha_s=\beta+\alpha=\theta$,

其中 $\beta=k_1\beta_1+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}=Bx$, $\alpha=t_1\alpha_1+\cdots+t_s\alpha_s=Ny$, $x=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-s} \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_s \end{pmatrix}$.

则有 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Ny=0$，故 $0=\beta^{\mathrm{T}}\theta=\beta^{\mathrm{T}}(\beta+\alpha)=\beta^{\mathrm{T}}\beta$，故 $\beta=\theta$，于是 $\alpha=\theta$.

从而 $k_1=\cdots=k_{n-s}=0$, $t_1=\cdots=t_s=0$，即 $(B,N)=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-s},\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 的列线性无关，

故有 $\mathrm{r}(B,N)=n$，最后可得 $n=\mathrm{r}(B,N)\le \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)\le n$，即 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.



$N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in R^{n\times s}$ $\quad \boxed{r(N)=s}$

m列 n行 $\quad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ n行s列.

m+s列

n行.

要证 $r(A^TN)$ = 转证 $r\begin{pmatrix} A \\ N^T \end{pmatrix}=n$

$r(A)=n-s$

$$\begin{array}{l} \text{n-s行} \\ \\ \text{s行} \end{array} \begin{pmatrix} A_1 & \cdots \\ A_2 & \cdots \\ A_m & \cdots \\ \alpha_1 & \cdots \\ \alpha_2 & \cdots \\ \vdots \\ \alpha_s & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ N^T \end{pmatrix}$$

n列

m+s行 n列.

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}$

$r(A)=n-s$.

n-s

n-s行.

s行.

$Ax=0$.

$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s})^T$. 从A中取极大无关组.

基础解系. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)^T$. 从N中取极大无关组

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}+t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_s\alpha_s=0$

$$B\begin{pmatrix} k_1 \\ \cdots \\ k_{n-s} \end{pmatrix}+N\begin{pmatrix} t_1 \\ \cdots \\ t_s \end{pmatrix}=0$$

$$\beta^T\alpha = x^T \underbrace{B^T N}_{\text{极大. 极大.}} y = 0$$

$\therefore \alpha=0 \quad \beta=0$.

$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_{n-s}=0$

$t_1=t_2=\cdots=t_s=0$.

$\therefore$ β与α线性无关.

$\therefore$ $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ 线性无关.

$r(A^TN)=r\begin{pmatrix} A \\ N^T \end{pmatrix}=n$.

六.(10分) 设矩阵 $A\in \mathrm{R}^{m\times n}$, $\mathrm{r}(A)<n$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=\theta$ 的基础解系，矩阵 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in \mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}},N)=n$.

未知数个数 $=r(A)+$ 基础解系中向量个数.

$\overset{m\times n}{A}\overset{n\times 1}{x}=0.$ 基础解系 $N=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$.

$n=r(A)+s$ $\boxed{r(A)=n-s.}$

要证 $r(A^T,N)=n$

即证 $r\begin{pmatrix}A\\N^T\end{pmatrix}=n.$

取A的行极大无关组 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s})^T$.

取 $(A\ N^T)^T$ 中的 ($\beta_1\sim\beta_{n-s}$ 行. $\alpha_1\sim\alpha_s$ 行, n列). $=D$

即证 $r(D)=n$. 即可.

$$D=\begin{pmatrix}\beta_1 \cdots\\ \beta_2\cdots\\ \cdots\\ \beta_{n-s}\cdots\\ \alpha_1\cdots\\ \alpha_2\cdots\\ \cdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$$ (n行 n列)

其中 $D=\begin{pmatrix}B\\N\end{pmatrix}$ B/N内部线性无关 $\boxed{\overset{(A)}{B^T}\overset{(x)}{N}=0}$.

即证 B与N之间线性无关.

即 $\underbrace{k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_{n-s}\beta_{n-s}}_{\beta}+\underbrace{t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_s\alpha_s}_{\alpha}=0.$

其中 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-s}=t_1=t_2=\cdots=t_s=0$. (全为0)

$\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\cdots\\\beta_{n-s}\end{pmatrix}(k_1\ k_2\cdots k_{n-s})=Bk$ $\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\cdots\\\alpha_s\end{pmatrix}(t_1\ t_2\cdots t_s).=Nt$

$\beta^T\alpha=k^TB^TNt=0$ k^T、t 至少一个为0

若 $K^T=0$ 即 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-s}=0$

那么 $t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_s\alpha_s=0$.

又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

$\therefore t=0$ 即 $t_1=t_2=\cdots=t_s=0$

$\therefore k_1=\cdots=k_{n-s}=t_1=\cdots=t_s=0$.

证毕.

$|A_1A_2\cdots A_k| = |A_1||A_2|\cdots|A_k|$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(A_1A_2\cdots A_k)^T = A_k^T\cdots A_2^TA_1^T$

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$

A 与 B. ⇒

$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

可逆阵基本性质：

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

$AA^* = A^*A = |A|E$

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$

$A^* = |A|^{n-1}$.

$\boxed{AB=E \quad A^{-1}=B \text{ (方阵)}}$

对准对角阵

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{pmatrix}$

矩阵的分解：

$A \in R^{m\times n}$ $r(A)=r$

m阶可逆阵 P n阶可逆阵 Q

$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

A、B n阶方阵 $r(A)=n$.

$\boxed{\begin{array}{l} \text{解 } Ax=B \\ x=A^{-1}B. \\ (A\ B)\to(E \mid A^{-1}B) \\ x=A^{-1}B \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{解 } xA=B \\ x=BA^{-1} \\ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix} \end{array}}$

向量 β 可由向量组线性表示

则 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$

有解.

$\beta = (x_1, x_2, \cdots, x_m)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$

部分相关，整体必相关

整体无关，部分必无关

$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 可由 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$

线性表示.

则 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\} \le r\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$

等价的向量组 ⇒ 秩相同

$r(A+B) \le r(A)+r(B)$

$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

n阶方阵 A、B.

$r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$.

证明有关秩的结论：极大无关组

分块、线性表示

构造 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A & E \\ -AB & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & E \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & E \\ -AB & 0 \end{pmatrix}}$

r(A) + 基础解系中向量个数 = 未知量个数

$$\boxed{\begin{array}{l} 若\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) \le n-2. \end{cases} \end{array}}$$

$AB = 0 \quad r(A) \le l - r(B)$

$A_{m\times l} \quad B_{l\times n}.$

$Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 是同解方程组.

若 $A^TA\alpha = 0.$

则 $\alpha^TA^TA\alpha = 0$

$(A\alpha)^TA\alpha = 0$

$\therefore A\alpha = 0$

$\therefore A^TAx$ 与 Ax 同解.

$\begin{pmatrix} A \\ b^T \end{pmatrix} x = 0$ 与 $Ax=0$ 同解

$\Longleftrightarrow A^Ty = b$ 有解.

证:

$A \sim B \Longleftrightarrow B = P^{-1}AP. \Longleftrightarrow PB = AP.$

$A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$

$A \sim B \Longrightarrow A^{-1} \sim B^{-1}.$

$A^n \sim B^n$

$kA \sim kB$

$f(A) \sim f(B)$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A\xi_i = \lambda_i \xi_i$

$P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n).$

A 特征值 λ. $\quad f(x) = P_n(x)$

$f(A) \; --- \; f(\lambda)$

$A^{-1} \; --- \; \lambda^{-1}.$

$A \sim B$ 具有相同 λ、ξ.

迹

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad |A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

λ 为特征值.

$A \sim B. \quad tr(A) = tr(B)$

$|A| = |B|$

秩相等的证明：

① 不等式 $\geq$ $\leq$

② 方程的解：同解、只有零解

③ 向量：极大无关组

4\. 设矩阵 $A = MN^{\mathrm{T}}$，其中 $M, N \in \mathrm{R}^{n\times r}$ $(r \leq n), |N^{\mathrm{T}}M| \neq 0$. 证明：$\mathrm{r}(A^2) = \mathrm{r}(A)$.

六.(10分) 设矩阵 $A \in \mathrm{R}^{m\times n}, \mathrm{r}(A) < n$，列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是齐次线性方程组 $Ax = \theta$ 的基础解系，矩阵 $N = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \in \mathrm{R}^{n\times s}$. 证明：$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}, N) = n$.

5\. 设矩阵 $A, B \in \mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(A, B)$.

5. 设矩阵 $A, B \in \mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(A, B)$.

证：$(AA^T + BB^T) = (A, B)\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$.

若 x 满足 $\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x = \theta$，则有 $(AA^T + BB^T)x = (A, B)\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x = \theta$.

若 x 满足 $(AA^T + BB^T)x = \theta$，令 $y = \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x$，则有 $x^T(AA^T + BB^T)x = y^Ty = 0$，

故 $y = \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x = \theta$，从而 $(AA^T + BB^T)x = \theta$ 与 $\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} x = \theta$ 同解.

于是 $r(N(AA^T + BB^T)) = r(N\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix})$，进一步有 $r(AA^T + BB^T) = r\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} = r(A, B)$.

5\. 已知列向量$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^n, (n > 2)$，$\alpha_1, \alpha_2$线性无关，若$B = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 \end{pmatrix}$，证明：$\mathrm{r}(B) = 2$.

2×1 1×2

$B = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix} (\alpha_1\ \alpha_2)$

若 $(\alpha_1\ \alpha_2)x = 0$

则 $Bx = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix}(\alpha_1\ \alpha_2)\ x = 0$.

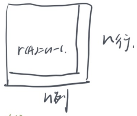
5. 已知列向量 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}^n, (n > 2)$，$\alpha_1, \alpha_2$ 线性无关，若 $B = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 \end{pmatrix}$，证明：$\mathrm{r}(B) = 2$.

证：设 $A = (\alpha_1, \alpha_2)$，则 $B = A^{\mathrm{T}}A$. 若 x 满足 $Bx = \theta$，则 $x^{\mathrm{T}}Bx = (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) = 0$，故 $Ax = \theta$.
又 α_1, α_2 线性无关，故 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2) = 2$，故 $x = \theta$，于是 $Bx = \theta$ 只有零解，从而 $\mathrm{r}(B) = 2$.

证法二：假设 $\mathrm{r}(B) \neq 2$，则 $|B| = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 - \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 = \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 - (\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2)^2 =$
即 $(\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2)^2 = \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2$. 柯西不等式 $(\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2)^2 \leq \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2$，当且仅当 α_1, α_2 成比例时等式成立，此即 α_1, α_2 线性相关，与条件矛盾，故 $\mathrm{r}(B) = 2$.

(构造方程的解)!

六.(10分) 设矩阵$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\mathrm{r}(A) = n - 1$,证明：$A^* = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$为列向量，且有$A\alpha = \theta, A^{\mathrm{T}}\beta = \theta$.　(矩阵 A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵)



$AA^* = |A|E = 0$　$r(A^*) = 1$.

$A\alpha\beta^T = 0$　$\boxed{|A| = 0}$

$AA^* = |A|E = 0$.

$r(A) = n-1$　x有n维

$Ax = 0$. 基础解,设为 α.

有 $\underline{A\alpha = 0}$.

即证 $\underline{A^{-1}AA^*} = A^{-1}A\alpha\beta^T$

$A^{-1}AA^* = A^{-1}0 = 0$

右 $= A^{-1}A\alpha\beta^T = 0$.

左 = 右.　即 $A^* = \alpha\beta^T$.

$AA^* = |A|E = 0$

A^*是 $Ax = 0$ 的解. 对A^*分块

$A^* = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$\xi_i$满足$A\xi_i = 0$

A^* 可用 α 表示：$\xi_i = k_i\alpha$.　　设$(k_1, \cdots k_n) = \beta^T$

$A^* = (k_1\alpha, k_2\alpha, \cdots, k_n\alpha) = \alpha(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \alpha\beta^T$

$A\alpha = 0$　$\alpha^TA^T = 0$

$(A^*)^T = \beta\alpha^T$

$A^*A = 0$　　$\alpha^T \neq 0$

$A^T(A^*)^T = 0$　　$\therefore A^T\beta = 0$

$A^T\beta\alpha^T = 0$

第四

A为$m \times n$矩阵，$r(A) = r > 0$，证明必有非零m维向量α_1，α_2，$\cdots$，α_r与n维向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$，使得$A = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_r\beta_r^T$。

解答：略。

$m\times n \quad n\times n \quad n\times n$

$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix}$

$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r)\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \cdots \\ \beta_r^T \end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1^T + \cdots + \alpha_r\beta_r^T.$

五、(10分)

4、向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$与$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$等价，证明齐次线性方程组$Ax = 0$与$Bx = 0$同

解，此处

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{ij})_{k\times n} = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_k^T \end{pmatrix}$$

二、(10分)

A是n阶实矩阵，$A^TA = AA^T$。证明：如果A是三角矩阵，则A必为对角矩阵。